Übung zum Lehrkräfteweiterbildungskurs 'Geometrie'

Aufgabe D1 (Symmetrieachse, Geradenspiegelung)
Bestimmen Sie alle Symmetrieachsen (d.h. Achsen von Geradenspiegelungen, die die entsprechende Figur auf sich abbilden) folgender Figuren der euklidischen Ebene (mit Begründung):

(a) $F_1 = \overline{AB}$ (Strecke) für zwei Punkte A und B mit $A \neq B$.

(b) ein Quadrat $\square ABCD$.

Hinweis: Die Achse einer Geradenspiegelung γ ist die (eindeutig bestimmte) Fixpunktgerade von γ, also eine Gerade g, die genau alle Fixpunkte von γ enthält. Weitere Geraden, die (nicht unbedingt punktweise) fix unter γ bleiben, sind genau die zu g orthogonalen Geraden der Ebene. Weil jede Geradenspiegelung γ involutorisch ist (d.h. id$= \gamma^2 \neq \gamma$), folgt aus $B = \gamma(A)$ auch $A = \gamma(B)$.

Lösungsskizze:

Zu (a) Jede Bewegung, die die Strecke $\overline{AB}$ auf sich abbildet, muss die Eckpunkte-Menge $\{A, B\}$ permutieren. Es gibt genau eine Geradenspiegelung γ_g, die die Punkte A und B als Fixpunkte hat; deren Achse ist die Gerade $g = AB$. Ebenso gibt es genau eine Geradenspiegelung $\gamma := \gamma_h$, die A auf B und damit B auf A abbildet: In diesem Fall ist die Spiegelachse h die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$; denn der Mittelpunkt M von $\overline{AB}$ bleibt wegen $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$ und wegen der Längentreue von γ fix; die Mittelsenkrechte ist somit und wegen der Winkeltreue von γ eine Fixgerade senkrecht zur Fixgeraden AB und daher die Achse. F_1 hat damit als Symmetrieachsen genau die Gerade AB und die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$.

Zu (b) Jede Spiegelung γ, die das Quadrat $ABCD$ auf sich abbildet, muss die Eckenmenge $\{A, B, C, D\}$ permutieren.Wir unterscheiden 4 Fälle, je nachdem auf welchen Punkt A abgebildet wird. Ist A Fixpunkt, so kann der (nicht zu A benachbarte Eckpunkt) C weder auf B noch auf D, die zu A benachbarten Eckpunkte, abgebildet werden. Daher ist höchstens die Diagonale AC des Quadrats die Achse von γ. Wird A auf B (bzw. auf C bzw. auf D) abgebildet, so bleibt die Strecke $\overline{A\gamma(A)}$ fix (unter dem involutorischen γ). Nach Teil a) kommen als Symmetrieachsen dieser Teilfigur nur die Trägergerade oder die Mittelsenkrechte dieser Strecke in Frage. Eine Seite des Quadrats kann aber keine Symmetrieachse sein, da die nicht auf ihr liegenden Eckpunkte in der gleichen Halbebene liegen, die nicht fix unter γ bleibt.

Als einzige Symmetrieachsen eines Quadrats $\square ABCD$ kommen in diesem Fall also die Mittelsenkrechten zu je einem Paar von gegenüberliegenden Seiten sowie die Diagonalen des Quadrats in Frage. Umgekehrt sind diese vier Geraden (wegen der Längen- und Winkeltreue von Spiegelungen) tatsächlich Symmetrieachsen des Quadrats.