Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik
'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II'

Aufgabe C4 (Eigenwerte, Eigenräume, Fixgeraden bei Endomorphismen)
Seien $V = \mathbb{R}^2$ und f ein Endomorphismus mit Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(bzgl. der kanonischen Basis von V)!
Bestimmen Sie diejenigen Nullpunktgeraden, die unter f fix bleiben!
Lösungshilfe: Berechnen Sie zunächst die Eigenwerte und Eigenräume von A. Die Nullpunktgeraden der Eigenräume sind die einzigen Fixgeraden des Automorphismus f durch den Nullpunkt. (Begründen Sie auch dieses!)

Lösungsskizze

(i) 1.Möglichkeit der Bestimmung der Eigenwerte und Eigenräume (ohne charakteristischem Polynom):

Aus

$$(*) \quad Ax = \lambda x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\xi \\ \lambda\eta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \eta & = & \lambda\xi \\ \xi & = & \lambda\eta \end{array} \right.$$

erhält man $\eta = \lambda^2\eta$ und $\xi = \lambda^2\xi$. Jeder Eigenvektor $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ muss ungleich dem Nullvektor sein. Es folgt $\lambda^2 = 1$, also $\lambda = \pm 1$. Umgekehrt erfüllen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ die Gleichungen $(*)$ und sind damit die (einzigen) Eigenwerte.

Weiterhin folgt aus $(*)$, dass $\mathrm{Eig}(A,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ und $\mathrm{Eig}(A,-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ die gesuchten Eigenräume sind.

2.Möglichkeit der Bestimmung der Eigenwerte und Eigenräume
(mittels charakteristischem Polynom):
Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A, also von

$$\chi_A(X) = \det(A - XE_2) = \begin{vmatrix} 0 - X & 1 \\ 1 & 0 - X \end{vmatrix} = X^2 - 1.$$

Es folgt: $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ sind als (einzige) Nullstellen von χ_A die Eigenwerte von A.

Da es hier bei $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$ zwei verschiedene Eigenwerte gibt, sind die zugehörigen Eigenräume 1-dimensional. Wir können damit leicht

$$\mathrm{Eig}(A,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R} \quad \text{und } \mathrm{Eig}(A,-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{R} \text{ erraten.}$$

Alternativ kann man zum Auffinden der Eigenräume die beiden folgenden linearen Gleichungssysteme lösen

$$\begin{pmatrix} 0-1 & 1 \\ 1 & 0-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0-(-1) & 1 \\ 1 & 0-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

die zum gleichen Ergebnis führen.

(ii) Bleibt eine Nullpunktgerade g unter f fix, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und ein $x_1 \in g$ mit $f(x_1) = \lambda x_1$ (und $x_1 \neq 0, \lambda \neq 0$, da f bijektiv ist.). Wegen der Linearität von f gilt dann $f(x) = \lambda x$ für jedes $x \in g$. Die Gerade g liegt somit im Eigenraum $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$ und ist daher im vorliegenden Fall aus Dimensionsgründen gleich diesem Eigenraum.