

Übungen zum Lehrcräftewerweiterungskurs "Lineare Algebra/Analytische Geometrie II"

Aufgabe C3 (Determinante / Eigenwert)

- (i) Erfülle $A_1 \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ die Bedingung $A_1^T \cdot A_1 = E_n$. (Eine solche Matrix heißt *orthogonale* Matrix.)
Bestimmen Sie $|\det A_1|$!
- (ii) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $f^2 = \text{id}$.
(a) Bestimmen Sie $|\det f|$ und $\det(f - \text{id}) \cdot \det(f + \text{id})$.
(b) Zeigen Sie: Ist λ ein Eigenwert von f , so gilt $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$.

Lösungsskizze

- (i) Es gilt $1 = \det E_n = \det A_1^T A_1 = \det A_1^T \cdot \det A_1 = (\det A_1)^2$, woraus $|\det A_1| = 1$ folgt.
- (ii) Zu (a): Sei $A = M_B^B(f)$ (nach Auswahl einer Basis B). Dann gilt:

$$\det(f) = \det(A) \text{ und } \det(f - \text{id}) = \det(A - E_2) \text{ sowie } \det(f + \text{id}) = \det(A + E_2).$$

und damit

$$f^2 = \text{id} \implies A^2 = E_2 \implies \det(A) \cdot \det(A) = \det(A^2) = \det(E_2) = 1 \implies |\det A| = 1 \implies |\det(f)| = 1 \quad \text{und}$$

$$\det(A - E_2) \cdot \det(A + E_2) = \det(A^2 - E_2) = \det(E_2 - E_2) = 0.$$

Zu (b): Sei $f(x) = \lambda \cdot x$ für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$x = \text{id}(x) = f^2(x) = f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x.$$

Damit ergibt sich sofort (da $x \neq 0$): $\lambda^2 = 1$ bzw. $\lambda = \pm 1$.