

## Übung zum Lehrkräftefortbildungskurs Mathematik 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II'

### Aufgabe C1 (Eigenwert, symmetrische Matrix)

Zeigen Sie:

Ist  $A$  eine reelle symmetrische Matrix, so sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von  $A$  orthogonal (bzgl. des kanonischen Skalarprodukts).

*Lösungshinweis:* Sind  $\lambda$  und  $\mu$  Eigenwerte von  $A$ , und sind  $v$  bzw.  $w$  zugehörige Eigenvektoren, so betrachte man  $\lambda(v \cdot w)$  !

#### Lösungsskizze

Für  $A$  als symmetrische Matrix gilt  $A = A^T$ . Seien  $\lambda \neq \mu$  zwei verschiedene Eigenwerte von  $A$  und  $\vec{v} \neq \vec{0}$  und  $\vec{w} \neq \vec{0}$  Eigenvektoren zu  $\lambda$  bzw.  $\mu$ , also mit  $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$  und  $A\vec{w} = \mu\vec{w}$ . Es gilt (mit dem kanonischen Skalarprodukt):

$$\begin{aligned}\lambda(\vec{v} \cdot \vec{w}) &= \lambda\vec{v}^T \vec{w} = (\lambda\vec{v})^T \vec{w} = (A\vec{v})^T \vec{w} = \vec{v}^T A^T \vec{w} = \vec{v}^T A\vec{w} = \vec{v}^T (\mu\vec{w}) \\ &= \mu\vec{v}^T \vec{w} = \mu(\vec{v} \cdot \vec{w}).\end{aligned}$$

Aus  $\lambda \neq \mu$  folgt  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ , also  $\vec{v} \perp \vec{w}$ . □