Übungen zum Lehrerweiterbildungskurs
"Lineare Algebra/Analytische Geometrie II"

Aufgabe B2 (Faktorraum, Vektorraum der Polynome)
Bezeichne $\mathbb{R}[X]$ den Vektorraum der reellen Polynome, und sei U der Unterraum

$$U = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0\}.$$

Bestimmen Sie die Dimension des Faktorraums (Quotientenvektorraums) $\mathbb{R}[X]/U$!

Lösungsskizze
Die Polynome $A(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} a_i X^i$ und $B(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} b_i X^i$ liegen genau dann in der selben Nebenklasse, wenn $A(X) - B(X) \in U$ ist, also gilt:

$$(A - B)(0) = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} (a_i - b_i) 0^i = a_0 - b_0,$$

folglich $A(X) \equiv B(X) \iff a_0 = b_0$. Daraus folgt: Das Polynom $A(X)$ liegt in der Nebenklasse $a_0 + U$, und die konstanten Polynome sind die Nebenklassenvertreter der unterschiedlichen Nebenklassen. Durch Multiplikation mit einem geeigneten Skalar erhält man also aus einer nicht-trivialen Nebenklasse jede andere; d.h.:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X]/U = 1.$$