Übungen zum Lehrerweiterbildungskurs
"Lineare Algebra/Analytische Geometrie II"

Aufgabe B1 (Faktorraum, Basis)

Sei U ein nicht-trivialer echter Unterraum mit Basis B_U des $K-$Vektorraums V; sei ferner $B = B_U \dot{\cup} D$ eine Ergänzung von B_U zu einer Basis B von V (und damit $D = B \setminus B_U$).
Zeigen Sie, dass dann $B_{V/U} := \{d+U \mid d \in (B\setminus B_U)\}$ eine Basis des Faktorraums V/U ist.

Lösungsskizze
Wir zeigen, dass $B_{V/U}$ (i) linear unabhängig und (ii) ein Erzeugendenystem von V/U ist. Natürlich sind die Elemente von $B_{V/U}$ Vektoren aus V/U.

(i) Gegeben sei eine Linearkombination des Nullvektors von V/U, also von U, mit Elementen aus $B_{V/U}$:

$U = \sum\limits_{i \in I}(d_i + U)\lambda_i$ (mit $d_i \in (B \setminus B_U)$ und $\lambda_i \in K$ sowie einer geeigneten Indexmenge I.)

Es folgt $U = \sum\limits_{i\in I} d_i\lambda_i + U$ und daraus $v = \sum\limits_{i\in I} d_i\lambda_i \in U$. Wären die λ_i nicht alle 0, so hätte, da $B_U \cap D = \emptyset$ und B_U Basis von U ist, der Vektor v zwei verschiedene Darstellungen mit Elementen aus B, ein Widerspruch. Also ist die gewï¿½hlte Linearkombination trivial; und $B_{V/U}$ ist linear unabhängig.

(ii) Ist w Element von V/U, so existiert ein $v \in V$ mit $w = v + U$. Da $B = B_U \cup D$ Basis von V ist, existiert eine Darstellung $v = \sum\limits_{i\in I} c_i\lambda_i + \sum\limits_{j\in J} d_j\mu_j$ mit $c_i \in B_U$ und $d_j \in B \setminus B_U$.

Wir erhalten: $w = v + U = \sum\limits_{i\in I} c_i\lambda_i + \sum\limits_{j\in J} d_j\mu_j + U = \sum\limits_{j\in J} d_j\mu_j + U$ (wegen $c_i \in U$), also $w = \sum\limits_{j\in J}(d_j + U)\mu_j$. Daher ist $B_{V/U}$ Erzeugendensystem von V/U.

Insgesamt folgt, dass $B_{V/U}$ eine Basis von V/U ist.