Übungen zum Lehrkräfteweiterbildungskurs "Lineare Algebra/Analytische Geometrie II"

Aufgabe A3 (Lineare Unabhängigkeit)
Für $a \in \mathbb{R}$ sei $e_a(x) := e^{ax}$. Zeigen Sie, dass die Menge $E := \{e_a | a \in \mathbb{R}\}$ in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ linear unabhängig ist. Was folgt daraus für die Dimension von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
*Hinweis:*Ohne Beweis dürfen Sie hier benutzen:
Gilt $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$, so hat die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n+1} & \cdots & a_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

vollen Rang; eine solche Matrix (oder die dazu transponierte) heißt *Vandermonde-Matrix.*

Lösungsskizze:
Lineare Unabhängigkeit einer Menge M heißt laut Definition, dass jede endliche Teilmenge von M linear unabhängig ist.
Sei also $F = \{e_{a_1}, \ldots, e_{a_n}\}$ eine endliche Teilmenge von E und seien $\lambda_{a_1}, \ldots, \lambda_{a_n}$ aus $\mathbb{R}$ mit $\sum \lambda_{a_i} e_{a_i} = 0$. Durch $n-1$-maliges sukzessives Ableiten und Einsetzen von $x = 0$ erhält man das lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & \ldots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da alle a_i verschieden sind, hat die Koeffizientenmatrix (diese ist eine Vandermonde-Matrix) vollen Rang, d.h. alle λ_i sind gleich 0. Dies zeigt, dass jede endliche Teilmenge von E und damit E selbst linear unabhängig ist.
Die Dimension von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist also mindestens gleich der Kardinalzahl von $\mathbb{R}$.