Übungen zum Lehrkräfteweiterbildungskurs "Lineare Algebra/Analytische Geometrie II"

Aufgabe W3 (Bilinearform, Skalarprodukt)
Bestimmen Sie alle Skalarprodukte g auf dem $\mathbb{R}-$Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit

$$(*) \qquad (100) \perp_g (001), \quad (100) \perp_g (010), \quad (010) \perp_g (001)$$

sowie

$$(**) \qquad ||(100)||_g = 1 = ||(010)||_g \,!$$

Lösungshinweis: Bestimmen Sie zunächst die Fundamentalmatrizen von Bilinearformen der geforderten Eigenschaften!

Lösungsskizze:
Sei M die Fundamentalmatrix einer Bilinearform g bzgl. der kanonischen Basis $B = (e_1, e_2, e_3)$ von $\mathbb{R}^3$. Wegen $M = M_B^B(g) = \big(g(e_i, e_j)\big)$ folgt aus $0 = g(e_1, e_3) = g(e_1, e_2) = g(e_2, e_3)$ und $\sqrt{g(e_1, e_1)} = 1 = \sqrt{g(e_2, e_2)}$ sowie aus der Symmetrie von g, dass nur folgende Matrizen für M

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad c \in \mathbb{R}$$

in Frage kommen. Umgekehrt ist jedes solche M Fundamentalmatrix einer Bilinearform g mit $(*)$ und $(**)$.
Zu untersuchen ist nun die positive Definitheit eines solche g, also $g(x, x)$ für $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$: Es gilt

$$g(x, x) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = (\xi_1, \xi_2, c\xi_3) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \xi_1^2 + \xi_2^2 + c\xi_3^2.$$

Wir unterscheiden 3 Fälle:

- Ist $c > 0$, so folgt aus den Eigenschaften von Quadraten reeller Zahlen: $g(x, x) \geq 0$ und $g(x, x) = 0$ nur für $x = 0$
- Ist $c = 0$, so $g(x, x) = 0$ für beliebige Vektoren $(0, 0, \xi_3)$. Es wäre g nicht positiv definit.

- Wäre $c < 0$, so folgte mit $x = (\xi_1, \xi_2, \sqrt{\frac{\xi_1^2+\xi_2^2}{|c|}})$, dass

$$g(x,x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \frac{c}{|c|}(\xi_1^2 + \xi_2^2) = 0$$

  für beliebige ξ_1 und ξ_2 ist.

Also ist g genau dann positiv definit und damit Skalarprodukt, wenn $c > 0$ gilt.
Anmerkung: Alternativ könnte man Sätze über reelle symmetrische Matrizen anwenden, die aber in der Vorlesung noch nicht behandelt wurden.