Übungen zum Lehrkräfteweiterbildungskurs
“Lineare Algebra/Analytische Geometrie II”

Aufgabe W2 (Skalarprodukt, Eigenwerte)
Sei M eine hermitesche Matrix, also $M = \overline{M}^T \in \mathbb{C}^{(n,n)}$, und sei f die lineare Abbildung von $V := \mathbb{C}^{(n,1)}$ in sich mit $x \mapsto Mx$. Das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^{(n,1)}$ werde mit Φ bezeichnet.

(i) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in V$ gilt:

$$(*) \qquad \Phi(f(x), y) = \Phi(x, f(y)).$$

(Eine solcher Endomorphismus heißt selbstadjungiert.)

(ii) Beweisen Sie, dass die Eigenwerte selbstadjungierter Endomorphismen (vgl. (i)) reell sind!

Lösungshinweis: Betrachten Sie z.B. $\Phi(\lambda x, x)$, wenn λ Eigenwert zum Eigenvektor x ist!

Lösungsskizze:

(i) $\Phi(f(x), y) = f(x)^T \cdot \overline{y} = (Mx)^T \cdot \overline{y} = x^T M^T \overline{y} = x^T \overline{M}\overline{y} = x^T \overline{My} = x^T \overline{f(y)} = \Phi(x, f(y))$.

(ii) Sei x Eigenvektor zum Eigenwert λ. Dann gilt

$$\lambda\Phi(x, x) = \Phi(\lambda x, x) = \Phi(f(x), x) \underset{(*)}{=} \Phi(x, f(x)) = \Phi(x, \lambda x) = \overline{\lambda}\Phi(x, x).$$

Da $\Phi(y, y)$ nur für $y = 0$ gilt (Φ ist possitiv definit !), ist hier $\Phi(x, x) \neq 0$ und daher $\lambda = \overline{\lambda}$, also $\lambda \in \mathbb{R}$.

Anmerkung: Man kann sich alternativ nicht allein auf Satz (28.9) aus der Vorlesung berufen, der besagt: Eigenwerte hermitescher Matrizen sind reell. Denn dazu müsste man noch zeigen, dass zu einer selbstadjungierten Abbildung umgekehrt auch eine hermitesche Matrix gehört.