Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik
'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II'

Aufgabe D5 (orthogonale Abbildung, Orthogonalraum)

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum; weiter sei φ ein Skalarprodukt auf V ; sei schließlich $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$ orthogonale Transformation bzgl. φ, d.h. es gelte insbesondere

$$\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y) \text{ für alle } x, y \in V.$$

Zeigen Sie:
(a) f ist bijektiv.
(b) Es gilt $U \cap U^{\perp} = \{0\}$ für jeden Unterraum U von V.

Lösungsskizze
zu (a): Aus $f(x) = 0$ folgt (wegen

$$\varphi(x, x) = \varphi(f(x), f(x)) = 0$$

und der positiven Definitheit) $x = 0$ und damit Kern $f = \{0\}$. Also ist f injektiv und wegen $\dim V < \infty$ auch bijektiv.

zu b)
Sei $v \in U \cap U^{\perp}$; nach Definition von $U^{\perp}$ gilt (mit 1. Komponente $v \in U$ und 2. Komponente $v \in U^{\perp}$) dann $\varphi(v, v) = 0$ und somit $v = 0$.