Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik
'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II'

Aufgabe D4 (Skalarprodukt, Orthogonalität, positive Definitheit)
Gibt es ein Skalarprodukt g auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ derart, dass gilt:

$$(1,0)\perp_g(0,1) \text{ und } (2,-2)\perp_g(-1,2) \text{ ?}$$

($\perp_g$ bezeichnet dabei die durch g induzierte Orthogonalitätsrelation auf $\mathbb{R}^2$.)
Lösungshinweis: Bestimmen Sie eine symmetrische Bilinearform g der geforderten Eigenschaften, und prüfen Sie, ob g Skalarprodukt ist!

Lösungsskizze
Allgemein gilt für eine symmetrische Bilinearform g:

$$g((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

wobei $\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ die zugehörige (symmetrische) Fundamentalmatrix ist. Es gilt:

$$(1,0)\perp_g(0,1) \iff 0 = g((1,0),(0,1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff c = 0,$$

ferner mit $c = 0$ dann

$$(2,-2)\perp_g(-1,2) \iff 0 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff b = -\frac{a}{2}.$$

Wäre g Skalarprodukt, so müsste g bzw. die zugehörige Fundamentalmatrix $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$ positiv definit sein.

1.Fall: $a \leq 0$; dann ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -\frac{a}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \leq 0$, ein Widerspruch zu $g(\vec{x},\vec{x}) > 0$ für $\vec{x} \neq 0$.

2.Fall: $a > 0$; dann ist $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -\frac{a}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{a}{2} < 0$, erneut ein Widerspruch zu $g(\vec{x},\vec{x}) > 0$ für $\vec{x} \neq 0$. Also ist die gefundene Bilinearform nicht positiv definit, und es gibt kein Skalarprodukt der geforderten Eigenschaft.

Alternative Lösung: Eine symmetrische Matrix $\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = A$ ist genau dann positiv definit, wenn $a > 0$ und $\det A > 0$. (S. Literatur!)

2. Alternative: Eine symmetrische reelle Matrix A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix $\hat{A}$. Auf der Diagonalen von $\hat{A}$ stehen die Eigenwerte von $\hat{A}$ (und damit von A). Die reelle Matrix $\hat{A}$ und damit A ist also genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte positiv sind.