Übungen zum Lehrkräfteweiterbildungskurs "Lineare Algebra/Analytische Geometrie II"

Aufgabe D1 (Sesquilinearform, orthogonal, linear unabhängig)
Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum mit J–Sesquilinearform Φ. Zeigen Sie, dass in V eine orthonormale Teilmenge $U = \{u_1, \ldots, u_r\}$, also $U \subseteq V$ mit[1] $\Phi(u_i, u_j) = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, r\}$, linear unabhängig ist.

Lösungsskizze

Wegen $\Phi(u_i, u_j) = \delta_{ij}$ und der Linearität von Φ in der 1. Komponente gilt:

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i = 0 \Longrightarrow 0 = \Phi(0, u_j) = \Phi(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i, u_j) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \Phi(u_i, u_j) = \alpha_j$$

(für alle $j = 1, \ldots, r$).

Daher ist U linear unabhängig.

[1] Hierbei bezeichnet δ_{ij} das Kronecker-Symbol: $\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$