Frage L2 zur Vorlesung "Lineare Algebra/Analytische Geometrie II" vom 22.2.2021

freiwillige Abgabe, Bearbeitung dringend empfohlen

Seien K ein Körper mit multiplikativer Gruppe $K^* := (K \setminus \{0\}, \cdot)$, $n \in \mathbb{N}$ und $(G, \cdot) = \mathrm{GL}(n, K)$ die Gruppe der regulären $n \times n-$Matrizen über K (mit der Multiplikation als Verknüpfung) sowie

$$\widetilde{\det} : G \to K^* \quad \text{mit} \quad M \mapsto \det(M).$$

Dann ist $\widetilde{\det}$ eine wohldefinierte Abbildung.

Frage 1:

Aufgrund welcher Eigenschaft der Determinante ist $\widetilde{\det}$ ein Gruppen-Homomorphismus? Geben Sie bitte nur den Namen des Satzes an!

Frage 2:

Geben Sie bitte den Kern von $\widetilde{\det}$ an!

Lösungsskizze:

Zu Frage 1:

Der Multiplikationssatz (der Determinanten-Theorie)

Anmerkung: Der Multiplikationssatz (26.6) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ liefert die für die Definition "Homomorphismus" benötigte Eigenschaft, s. Skript (4.1a).

Zu Frage 2:

Kern $\widetilde{\det} = \{M \in G \mid \det M = 1\}$

Anmerkung: Da das neutrale Element von $(K^*, \cdot)$ gleich der "1" aus K ist, bilden die Matrizen mit $\det M = 1$ den Kern. Die Bezeichnung dieser Gruppe ist $\mathrm{SL}(n, K)$ (spezielle lineare Gruppe vom Grad n über "K").