Frage L1 zur Vorlesung
“Lineare Algebra/Analytische Geometrie II” vom 8.2.2021

freiwillige Abgabe

Sei V ein $4 - \dim K$-Vektorraum, und seien U und W Unterräume von V der Dimension 2. Beantworten Sie bitte unter Verwendung der Dimensionsformel:
Frage 1:
Unter welcher Bedingung an $\dim(U \cap W)$ ist $U + W$

(i) der ganze Raum

(ii) eine Nullpunkts-Ebene

(iii) ein Hyperebene?

Antworten Sie bitte in folgender Tabellenform:

Fall Nr.	$\dim(U \cap W)$	$\dim(U + W)$	Art des Unterraums
1	$\dim(U \cap W) = 0$		
2	$\dim(U \cap W) = 1$		
3	$\dim(U \cap W) = 2$		
4	$\dim(U \cap W) = 3$	möglich?	

Frage 2: In welchem der Fälle ist $U + W$ direkte Summe?
Frage 3: Können U und W parallel sein?

Lösungsskizze:
Zu Frage 1: Aus

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - \dim(U \cap W)$$

ergibt sich:

Fall Nr.	$\dim(U \cap W)$	$\dim(U + W)$	Art des Unterraums
1	$\dim(U \cap W) = 0$	4	der ganze Raum V
2	$\dim(U \cap W) = 1$	3	Hyperebene
3	$\dim(U \cap W) = 2$	2	Ebene $U = W$
4	$\dim(U \cap W) = 3$	nicht möglich	$*$)

$*$) da ein UR (hier: $U \cap W$) eines VR's (hier: U oder W) keine größere Dimension (hier: als U bzw. W) haben kann.

Zu Frage 2: Die direkte Summe erfordert $U \cap W = \{0\}$; damit ist nur im Fall 1 die Summe direkt.
Zu Frage 3: Laut Definition der Parallelität in der Analytischen Geometrie gilt für affine Unterräume L und M im affinen Raum

$$L \parallel M \Leftrightarrow U_L \subseteq U_M \vee U_M \subseteq U_L.$$

Hier sind $L = U = U_L$ und $M = W = U_M$. Daher und wegen der Dimensionen von U und W folgt $U \parallel W \Leftrightarrow U = W$ (Fall 3).