Modulprüfung Lineare Algebra/Analytische Geometrie II (90 minütige Klausur) zur Lehrkräfteweiterbildung Mathematik am 14.6.2021

Name, Vorname	Aufg.1	Aufg.2	Aufg.3	Aufg.4	Σ	%	Note
Punkte →							

Bearbeiten Sie bitte **drei der vier Aufgaben**. Falls Sie alle vier Aufgaben bearbeitet haben sollten, kennzeichnen Sie bitte, welche drei Aufgaben gewertet werden sollen! Zur vollständigen Lösung einer Aufgabe gehört, wenn nicht anders angegeben, auch die (stilistisch einwandfreie zielführende) **Darstellung des Gedankenganges**. Pro gelöster Aufgabe erhalten Sie 10 Punkte. Eigener nicht-programmierbarer Taschenrechner ist erlaubt.

Aufgabe 1 (Lineare Gleichung, Linearform, Komplement, direkte Summe)

(a) Gegeben sei folgende reelle lineare Gleichung:

$$(*) \qquad \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3 + \alpha_4\xi_4 = \beta$$

(mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, \ldots, 4\}$ und $\beta \in \mathbb{R}$), und sei L der Lösungsraum von $(*)$!

(i) (2 Punkte) Für welche Werte von $\hat{a} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_4)$ und β ist $(*)$ nicht lösbar? Und welche Möglichkeiten für die Dimension von L gibt es im Falle der Lösbarkeit?

(ii) (2 Punkte) Sei $a := (\alpha_1 \ldots \alpha_4)$ die Matrix der Linearform

$$f_a : \mathbb{R}^{(4,1)} \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto a \cdot x\ !$$

Wie lässt sich die Gleichung $(*)$ aus (i) mithilfe von f_a schreiben, und welcher Zusammenhang besteht zwischen f_a, L und β ?

(iii) (2 Punkte) Seien nun speziell a gleich der Matrix $a_1 = (1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)$ und $\beta = 0$, ferner L_0 der Kern von f_a! Bestimmen Sie $\operatorname{codim}_{\mathbb{R}^4} L_0$.

(iv) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass für L_0 aus (iii) und den Unteraum $U := (1,1,1,1)\,\mathbb{R}$ gilt: $\mathbb{R}^4 = L_0 \oplus U$ und $L_0 \perp U$ (wobei $\perp$ bezüglich des kanonischen Skalarprodukts definiert sei)!

(b) (2 Punkte) Seien U und W 2-dim Unterräume eines 4-dim Vektorraums V mit $V = U + W$. Begründen Sie mittels Dimensionsbetrachtung, dass V gleich der direkten Summe von U und W ist.

Aufgabe 2 (Fixpunkte, Determinante)

(a) Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)}$$

und die Abbildung

$$f_A : \mathbb{R}^{(2,1)} \to \mathbb{R}^{(2,1)} \text{ mit } x \mapsto Ax.$$

(i) (3 Punkte) Berechnen Sie die Bilder der Punkte der Nullpunktgeraden $g := \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ und der Nullpunktgeraden $h = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ unter f_A !

(ii) (2 Punkte) Vergleichen Sie die Punkte von g bzw. h mit ihren Bildern!

(iii) (2 Punkt) Welche Eigenwerte besitzt A ?
Anmerkung: Die Berechnung des charakteristischen Polynoms oder des Minimalpolynoms von A ist nach Bearbeitung von (i) und (ii) nicht erforderlich.

(b) (3 Punkte) Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und

$$S := \{M \in K^{(n,n)} \mid \det M = 1\}.$$

Begründen Sie mit Eigenschaften der Determinante, dass S bezüglich Multiplikation und Inverse-Bildung abgeschlossen ist.

Aufgabe 3 (Eigenwerte, Eigenräume, Minimalpolynom)
Sei A die folgende reelle (2×2)-Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

(i) (1 Punkt) Begründen Sie ohne Rechnung durch Zitat eines Satzes:
A besitzt Eigenwerte.

(ii) (4 Punkte) Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A im Falle $\alpha \neq 0$ und zu <u>einem</u> dieser Eigenwerte (z.B. λ_1) den zugehörigen Eigenraum von A.

(iii) (2 Punkte) Welche algebraische und welche geometrische Vielfachheit hat der Eigenwert λ_1 von A im Falle $\alpha \neq 0$?

(iv) (3 Punkte) Welches Polynom ist das Minimalpolynom H_A von A im Falle $\alpha \neq 0$?

Aufgabe 4 (Skalarprodukt, Fundamentalmatrix, Isometrie)

Seien V der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{(n,1)}$ und $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ die kanonische Basis von V. Sei ferner Ψ das Skalarprodukt auf V mit Fundamentalmatrix $G := M_B(\Psi) = (\gamma_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, gelte also $\Psi(u,v) = u^T G v$ für alle $u, v \in V$.

(a) (2 Punkte) Geben Sie (ohne Beweis) $\Psi(e_i, e_j)$ an!

(b) (3 Punkte) Sei M eine reelle $n \times n$-Matrix mit $(*)$ $M^T G M = G$.
Begründen Sie: $\Psi(Mu, Mv) = \Psi(u, v)$ für alle $u, v \in V$.

(c) (5 Punkte) Zeigen Sie dann, dass die Matrix-Bedingung $(*)$ $M^T G M = G$ notwendig dafür ist, dass die lineare Abbildung $m : \mathbb{R}^{(n,1)} \to \mathbb{R}^{(n,1)}$ mit $m(v) = M \cdot v$ das Skalarprodukt Ψ erhält, dass also gilt:

$$(**) \quad \Psi(m(u), m(v)) = \Psi(u, v) \quad \text{für alle } u, v \in \mathbb{R}^{(n,1)}.$$

Lösungshinweis: Gehen Sie von $(*)$ aus und zeigen Sie, dass dann $(**)$ gilt.

Lösungsskizzen

ad Aufgabe 1

(a) (i) Wir unterscheiden 3 Fälle:
$(*)$ ist nicht lösbar, wenn $\hat{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_4) = \mathfrak{o}$ und $\beta \neq 0$ gilt.
Im Falle $\hat{a} = \mathfrak{o}$ und $\beta = 0$ ist $L = \mathbb{R}^4$ und $\dim_{\mathbb{R}} L = 4$.
Gilt hingegen $\hat{a} \neq \mathfrak{o}$, dann ist L affiner Unterraum der Dimension $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 - \mathrm{Rang}((\alpha_1 \dots \alpha_4)) = 4 - 1 = 3$.

(ii) $(*)$ kann als $f_a(x) = \beta$ geschrieben werden. Und L ist das volle Urbild von β unter f_a.

(iii) Nach der entsprechenden Dimensionsformel gilt
$\mathrm{codim}_{\mathbb{R}^4} L_0 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 - \dim_{\mathbb{R}} L_0 = 4 - (\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 - \mathrm{Rang}(a_1) = 1$.

(iv) Da L_0 der Gleichung $a_1 \cdot x = 0$ genügt, erfüllt $U := (1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)\mathbb{R}$ die Bedingung $U \perp L_0$. Auch gilt $U \cap L_0 = \{0\}$, da $a_1 \cdot a_1^T \neq 0$, und aus Dimensionsgründen $V = U + L_0$, woraus dann $\mathbb{R}^4 = U \oplus L_0$ folgt.

(b) Es gilt laut Definition von U und W und der Dimensionsformel für Summen von Unterräumen:
$$4 = 2 + 2 = \dim_V U + \dim_V W = \dim_V(U + W) + \dim_V(U \cap W)$$
$$= 4 + \dim_V(U \cap W).$$
Es folgt $\dim_V(U \cap W) = 0$, also $U \cap W = \{0\}$, woraus sich die Behauptung “direkte Summe” laut Definition ergibt.

ad Aufgabe 2

(a) (i) $f_A(\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \lambda$
und
$f_A \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \lambda = A \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \lambda.$

(ii) Jeder Punkt von g wird auf sein $(-1)-$fache abgebildet, jeder Punkt von h auf sich selbst.

(iii) Aus den Lösungen von (i) und (ii) ergeben sich die Eigenwert 1 und -1. Aus Dimensionsgründen gibt es keine weiteren Eigenwerte von A.

Anmerkung: Da das Skalarprodukt der Fixpunkte mit den Punkten von g laut (i) gleich 0 ist, sind die Eigenräume zu den Eigenwerten 1 und -1 orthogonal. Daher ist f_A eine Geradenspiegelung.

(b) Seien $A, B \in S$, also $A, B \in K^{(n,n)}$ und $\det A = \det B = 1$. Dann gilt nach dem Determinanten-Multiplikationssatz für Matrizen:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = 1 \cdot 1 = 1$$

und nach einem weiteren Satz über Determinanten:

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = 1^{-1} = 1.$$

Also sind mit A und B auch $A \cdot B$ und A^{-1} Elemente von S; damit ist S abgeschlossen bzgl. Multiplikation und Inversebildung.

Anmerkung: S wird mit $\mathrm{SL}(n, k)$ bezeichnet, ist der Kern des Gruppenhomomorhismus

$$\delta : G = \mathrm{GL}(n, K) = \{M \in K^{(n,n)} \mid \det M \neq 0\} \to K^* \text{ mit } M \mapsto \det M$$

und daher sogar Normalteiler von G.
Damit ist eine **alternative Argumentation** möglich:
Es ist δ nach dem Determinanten-Multiplikationssatz ein Homomorphismus mit Kern $\delta = S$; als Normalteiler von G ist S abeschlossen bzgl. Multiplikation und Inversebildung.

ad Aufgabe 3

(i) A ist eine reelle symmetrische Matrix. Nach einem Satz (aus der Vorlesung) besitzen solche Matrizen Eigenwerte.

(ii) Das charakteristische Polynom von A ist

$$\chi_A(X) = \det(A - XE_2) = (2 - X)^2 - \alpha^2 = X^2 - 4X + 4 - \alpha^2.$$

Die Nullstellen von χ_A sind

$$\lambda_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4 - 4 + \alpha^2} = 2 \pm |\alpha|,$$

also z.B. $\lambda_1 = 2 + \alpha$ und $\lambda_2 = 2 - \alpha$.

Die Eigenräume berechnen sich (zusammengefasst) wie folgt

$$\mathrm{Eig}(A, \lambda_{1/2}) = \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,1)} \middle| \begin{pmatrix} 2 - 2 \mp \alpha & \alpha \\ \alpha & 2 - 2 \mp \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathrm{Eig}(A,\lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,1)} \middle| -\alpha\xi + \alpha\eta = 0 \wedge \alpha\xi - \alpha\eta = 0 \right\}$$

$$\mathrm{Eig}(A,\lambda_2) = \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,1)} \middle| \alpha\xi + \alpha\eta = 0 \wedge \alpha\xi + \alpha\eta = 0 \right\}$$

Im Fall $\alpha \neq 0$ erhalten wir die Eigenräume
$\mathrm{Eig}(A, 2+\alpha) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ und $\mathrm{Eig}(A, 2-\alpha) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$.

Anmerkung: Die Eigenwerte und Eigenräume könnte man auch durch Erraten erhalten; das wäre dann aber nicht "Berechnen".

(iii) Nach (ii) haben (im Fall $\alpha \neq 0$) die Eigenwerte $2+\alpha$ bzw. $2-\alpha$ die geometrische und algebraische Vielfachheit 1.
Anmerkung: Da jeweils das charakteristische Polynom zerfällt und die geometrischen gleich den algebraischen Vielfachheiten sind, ist A in jedem der Fälle ähnlich zu einer Diagonalmatrix, in deren Diagonale die Eigenwerte stehen.

(iv) Da die Nullstellen des Minimalpolynoms die des charakteristischd Polynoms (evtl. in unterschiedlicher Vielfachheit) sind, folgt hier im Falle $\alpha \neq 0$:

$$H_A(X) = \chi_A(X) = (X - 2 - \alpha)(X - 2 + \alpha).$$

ad Aufgabe 4:

(a) $\Psi(e_i, e_j) = \gamma_{ij}$.
Anmerkung:
Laut Aufgabenstellung gilt $\Psi(u,v) = u^T G v$ für alle $u, v \in V$, insbesondere $\Psi(e_i, e_j) = e_i^T G e_j = \gamma_{ij}$. (Statt so zu argumentieren, kann man auch einen Hilfssatz aus der Vorlesung zitieren.)

(b) Es gilt nach Voraussetzung $M^T G M = G$ und daher:
$\Psi(Mu, Mv) = (Mu)^T G M v = u^T \underline{M^T G M} v = u^T \underline{G} v = \Psi(u,v)$ für alle $u, v \in V$.

(c) Aus der gefordereten Gültigkeit von $(*)$ ergibt sich

$$\Psi(u,v) = \Psi(m(u), m(v)) \Rightarrow u^T G v = (Mu)^T G (Mv) = u^T M^T G M v$$

für alle $u, v \in \mathbb{R}^{(n,1)}$. Einsetzen von (e_i, e_j) für (u,v) liefert mit $e_i G e_j^T = e_i M^T G M e_j^T$ die Gleichheit der Einträge von Stelle (i,j); dies zeigt die Notwendigkeit von $G = M^T G M$.
Anmerkung: Diese Bedingung ist wegen Teil (b) auch hinreichend.