Frage G2 zur Vorlesung "Geometrie" vom 17.2.2021

Bearbeitung freiwillig; Veröffentlichung der Antworten/Lösungen am 23.2. nachmittags

Seien A, B, C drei nicht-kollineare Punkte in einem geordneten 3-dim affinen Raum $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{E})$, seien ferner $h_1 = AB, h_2 = BC$ und $h_3 = AC$ die Geraden durch diese Punkte. Bezeichne $[XY]$ das Intervall (die Strecke $\overline{XY}$) mit Randpunkten X und Y und $]XY[:= [XY] \setminus \{X, Y\}$. Sei ferner g eine Gerade in $\mathcal{A}$ mit

$$g \cap]AB[= \{D\} \quad \text{mit} \quad D \in \mathcal{P}.$$

Welche/welcher der folgenden Fälle kann nicht auftreten? Geben Sie bitte lediglich die Fall-Nummern an!:

Fall 1: g schneidet $]AC[$ und $h_2 \setminus [BC]$.

Fall 2: g schneidet $]AC[$ und nicht h_2.

Fall 3: g schneidet $]AC[$ und $]BC[$.

Fall 4: g schneidet h_2 und h_3.

Fall 5: g schneidet weder h_2 noch h_3.

Lösungsskizze

Fall 3 kann als einziger nicht auftreten: Schneidet g die offenen Strecken $]AB[$ und $]AC[$, so nicht $]BC[$ (nach der Ergänzung zum Paschaxiom).

Anmerkungen:

Wählt man einen Punkt R von $]AC[$, so liegt die Gerade $g = RD$ in der von A, B, C aufgespannten Ebene E, geht nicht durch A, B oder C; es folgt nach dem Pasch-Axiom, dass g die Strecke $]BC[$ nicht schneidet, also entweder durch $h_2 \setminus [BC]$ geht **(Fall 1)** oder parallel zu h_2 ist **(Fall 2)**.
Fall 4 tritt z.B. auf, wenn $g = CD$ ist. (Eigentlich sollte dieser Fall heißen : g schneidet h_2 und h_3, aber weder $]AC[$ noch $]BC[$. Dann wäre nur $g = CD$ möglich gewesen.)
Fall 5 tritt auf, wenn g nicht in der von A, B und C aufgespannten Ebene E liegt.