Übung zum Lehrerweiterbildungskurs 'Geometrie'

Aufgabe D2 (Kongruenz von Rechtecken, Bewegung, freie Beweglichkeit)
Seien $\mathcal{R}_1 = \square\square A_1B_1C_1D_1$ und $\mathcal{R}_2 = \square\square A_2B_2C_2D_2$ Rechtecke der reellen euklidischen Ebene, beide mit den gleichen Seitenlängen a bzw. b.
Zeigen Sie abbildungsgeometrisch, dass $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ kongruent sind!
Hinweis: Ohne Beweis benutzen dürfen Sie hier Eigenschaften von ebenen Bewegungen und den Satz von der freien Beweglichkeit.

Lösungsskizze:

Seien A_iB_i Seiten der Länge a und sei D_i in $\mathcal{R}_i$ benachbart zu A_i (für $i = 1,2$). Nach dem Satz von der freien Beweglichkeit gibt es eine (sogar eindeutig bestimmte) Bewegung κ, die die Fahne $(A_1B_1^+, A_1B_1D_1^+)$ auf die Fahne $(A_2B_2^+, A_2B_2D_2^+)$ abbildet. Als "Fahnenspitze" wird A_1 unter κ auf A_2 abgebildet. Aus der Längentreue von κ folgt wegen $|\overline{A_1B_1}| = a = |\overline{A_2B_2}|$, dass $\kappa(B_1) = B_2$ gilt. Winkelgrößentreue und Längetreue von κ (Winkel antragen, Strecke abtragen !) zeigen $\kappa(D_1) = D_2$. Und schließlich: Weil C_i Schnittpunkt der Parallelen zu A_iB_i durch D_i und der Parallelen zu A_iD_i durch B_i ist (für $i = 1,2$), wird C_1 unter κ auf C_2 abgebildet. Daher gilt $\kappa(\mathcal{R}_1) = \mathcal{R}_2$ und damit $\mathcal{R}_1 \equiv \mathcal{R}_2$.
Anmerkung: κ ist das Produkt der Translation $\tau_{A_1A_2}$ mit (nachfolgender) geeigneter Drehung und gegebenenfalls Geradenspiegelung.