Übung zum Lehrerweiterbildungskurs 'Geometrie'

Aufgabe C4 (Kongruenzsätze, Parallelogramm, Rechteck)
Beweisen Sie mit Hilfe von Kongruenzbetrachtungen den Satz: In der euklidischen Ebene ist ein Parallelogramm genau dann ein Rechteck, wenn seine beiden Diagonalen kongruent sind.

Lösungsskizze

"$\Longleftarrow$" Sei $\square ABCD$ ein Rechteck. Dann sind nach Definition alle vier (Innen)-Winkel kongruent; die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{DC}$ (bzw. $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$) liegen auf freien Schenkeln von kongruenten Stufenwinkeln und sind daher parallel. Nach Aufgabe C2 gilt daher $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$ und $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$. Mit Kongruenzsatz SWS folgt dann $\triangle ABC \equiv \triangle BAD$ und somit auch $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$.

"$\Longrightarrow$" Gelte nun $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$ im Parallelogramm $\Diamond ABCD$. Auch im allgemeinen Parallelogramm haben wir $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$ und $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ (vgl. Aufgabe C2). Der Kongruenzsatz SSS liefert

$$\triangle ABC \equiv \triangle BAD \equiv \triangle CDA \equiv \triangle DCB$$

und damit auch

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CDA \equiv \sphericalangle DCB.$$

Jeder Innenwinkel und ein geeigneter Außenwinkel sind als Stufenwinkel an parallelen Geraden kongruent und daher hier kongruent zu ihren Nebenwinkeln, also rechte Winkel. $\square$