Übung zum Lehrkräfteweiterbildungskurs 'Geometrie'

Aufgabe B1 (Zwischenrelation, auch analytisch)

(i) Auf jeder Geraden $g = a + b\mathbb{R}$ von $\mathcal{A} =$AG$(3, \mathbb{R})$ sei eine Ordnungsrelation wie folgt definiert (Spezialfall von Skript 7.4 und 7.5):

$$(*) \qquad a + bk \leq_g a + b\ell \Leftrightarrow k \leq l$$

Zeigen Sie:

1.) Die von $\leq_g$ induzierte Zwischenrelation ist für jede Gerade g unabhängig von den Vektoren a und b.

2.) Bei einer zentrischen Streckung bleibt die Zwischenrelation erhalten und die vorgegebenen Ordnungen werden sämtlich belassen oder sämtlich umgedreht.

(ii) Zeigen Sie, dass von drei verschiedenen kollinearen Punkten eines geordneten Inzidenzraumes $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{E})$ stets genau einer zwischen den beiden anderen liegt. (Aufgabe 30 des Skripts)

Lösungsskizze:

(i) 1.) Der zur Geraden $g = a + bK$ gehörende 1-dim Unterraum bK ist eindeutig bestimmt, somit b bis auf ein skalares Vielfaches, und der Repräsentant a bis auf einen Summanden der Form bk_1. Eine andere Darstellung von g hat also die Form $g = a' + b'K$ mit $a' = a+bk_1$ und $b' = bk_2$ (mit festem $k_2 \neq 0$). Gemäß der Definition $(*)$ für a' und b' erhält man dann $a' + b'k' \leq'_g a' + b'\ell' \Leftrightarrow k' \leq l'$. Ersetzt man a' und b', so sieht man

$$\begin{aligned}
a' + b'k' \leq'_g a' + b'\ell' \quad &\Leftrightarrow \quad a + bk_1 + bk_2k' \leq'_g a + bk_1 + bk_2\ell' \\
&\Leftrightarrow \quad a + b(k_1 + k_2k') \leq'_g a + b(k_1 + k_2\ell') \\
&\Leftrightarrow \quad k_1 + k_2k' \leq k_1 + k_2\ell' \Leftrightarrow k_2k' \leq k_2\ell' \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} k' \leq \ell' & \text{(falls } k_2 > 0) \\ k' \geq \ell' & \text{(falls } k_2 < 0) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a' + b'k' \leq_g a' + b'\ell' & \text{(falls } k_2 > 0) \\ a' + b'k' \geq_g a' + b'\ell' & \text{(falls } k_2 < 0) \end{cases}
\end{aligned}$$

Da k_2 mit b' fest gewählt war, bleibt bei anderer Darstellung von g die durch $(*)$ definierte Ordnung unverändert oder dreht sich um. Die Zwischenrelation bleibt jeweils unverändert.

2.) Eine zentrische Streckung δ in $\mathrm{AG}(3, \mathbb{R})$ hat die Abbildungsgleichung

$$\delta(x) = (x - p)m + p \quad \text{mit} \quad p \in K^3 \quad \text{und} \quad m \in \mathbb{R}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
&\delta(a+bk) \leq_{\delta(g)} \delta(a+b\ell) \Leftrightarrow (a+bk-p)m+p \leq_{\delta(g)} (a+b\ell-p)m+p \\
&\quad \Leftrightarrow (am - pm + p) + bkm \leq_{\delta(g)} (am - pm + p) + b\ell m \\
&\quad \Leftrightarrow km \leq \ell m \\
&\quad \Leftrightarrow \begin{cases} k \leq \ell & (\text{falls } m > 0) \\ k \geq \ell & (\text{falls } m < 0) \end{cases} \\
&\quad \Leftrightarrow \begin{cases} a + bk \leq_g a + b\ell & (\text{falls } m > 0) \\ a + bk \geq_g a + b\ell & (\text{falls } m < 0) \end{cases}
\end{aligned}$$

Da m durch δ fest gegeben ist, bleiben die Ordnungen entweder alle erhalten (im Falle, dass der Streckungsfaktor m positiv ist) oder werden alle umgedreht (falls derStreckungsfaktor negativ ist). Die Zwischenrelation bleibt in beiden Fällen erhalten.

(ii) Gegeben seien die drei Punkte X, Y und Z einer Geraden $g \in \mathcal{G}$. Wir wählen $\leq$ als diejenige der beiden Ordnungsrelationen von g, für die $X < Y$ gilt. (Dies ist möglich, da auf g eine lineare (totale) Ordnungsrelation und ihre entgegengesetzte Relation existieren und die Punkte verschieden sind.)

Es gibt nun die beiden Fälle $Y < Z$ und $Z < Y$.
Im ersten folgt aus $X < Y < Z$, dass Y zwischen X und Z liegt.

Sei also $Z < Y$. Ist dann $X < Z$, so gilt $X < Z < Y$ und Z liegt zwischen X und Z. Und ist $Z < X$, so $Z < X < Y$, und X liegt zwischen Z und Y.

Um zu zeigen, dass nur genau einer der Punkte zwischen den beiden anderen liegt, gehen wir von $X \leq Y \leq Z$ aus. Läge nun X zwischen Y und Z, also $Y \leq X \leq Z$ so folgte aus der Antisymmetrie von $\leq$ die Gleichheit von X und Y. Analog kann Z nicht zwischen X und Y liegen. $\square$

Anmerkung: Der Beweis benutzt nur, dass $\leq_g$ eine lineare Ordnung ist bzw. die entgegengesetzte Relation existiert). Die Aussage gilt daher nicht nur für kollineare Punkte eines geordneten Inzidenzraumes, sondern auch für die Elemente jeder anderen totalgeordneten Menge.