

Übung zum Lehrkräfteweiterbildungskurs 'Geometrie'

Aufgabe 8 (Translationen)

Es seien N, P, Q nicht-kollineare Punkte eines 3-dim affinen Raumes \mathcal{A} . Zeigen Sie:

- (a) Jede Translation τ von \mathcal{A} bildet jede Ebene E von \mathcal{A} auf eine zu ihr parallele Ebene ab.
- (b) Die Translation τ_{NP} und die Translation $\tau_{NP} \circ \tau_{NQ}$ lassen die Ebene NPQ fest.

Anmerkung:

Es handelt sich um die Aufgaben 23 und 24b des Skripts.

Lösungshilfe:

zu (a): Sei $S \in E \cap \tau(E)$. Zeigen Sie dann u.a.: $RS = S\tau(S)$ für das Urbild R von S .

zu (b): Wenden Sie (a) für $\tau = \tau_{NP}$ und $S = P$ an!

Lösungsskizze

zu (a): Für die Translation $\tau = \text{id}$ sind jede Ebene und ihr Bild gleich und damit parallel. Falls $\tau \neq \text{id}$ und $E \cap \tau(E) = \emptyset$ gilt, sind die Ebene und ihr Bild nach Definition parallel.

Gelte also $\tau \neq \text{id}$ und $E \cap \tau(E) \neq \emptyset$. Es existiert also ein Schnittpunkt S und, da Translationen bijektiv sind, ein $R \in E$ mit $\tau(R) = S$. Da τ Translation ist, folgt $RS \parallel \tau(R)\tau(S) = S\tau(S)$, also $RS = S\tau(S)$ und somit auch $\tau(S) \in E$. Man wählt nun noch $X \in E$ derart, dass X, R, S nicht kollinear sind. Da $\tau(S)\tau(X) \parallel SX \subseteq E$ und $\tau(S) \in E$, erhält man auch $\tau(X) \in E$. Da X, S, R nicht kollinear sind, folgt dies unmittelbar auch für die Bilder. Durch die drei Punkte $\tau(X), \tau(S), \tau(R)$ wird $\tau(E)$ aufgespannt. Aber da sie alle drei in E liegen, folgt $\tau(E) = E$.

zu (b): Wegen $\tau_{NP}(N) = P$, also $P \in E \cap \tau_{NP}(E)$, lässt τ_{NP} die von N, P und Q aufgespannte Ebene E fest: denn aus $E \cap \tau_{NP}(E) \neq \emptyset$ erhält man (vgl. den Beweis zu (a)) $E = \tau_{NP}(E)$. Ganz analog ergibt sich auch $E = \tau_{NQ}(E)$. Damit ist aber $\tau_{NP} \circ \tau_{NQ}(E) = \tau_{NP}(E) = E$.

Alternativ zu (a): Sind g und h zwei sich in R schneidende Geraden der Ebene E , so schneiden sich auch $\tau(g)$ und $\tau(h)$ und sind parallel zu E ; die von $\tau(g)$ und $\tau(h)$ aufgespannte Ebene ist dann gleich $\tau(E)$ und parallel zu E .