Übung zum Lehrkräfteweiterbildungskurs 'Geometrie'

Aufgabe A6 (Parallelität– elementargeometrisch und analytisch)
Seien V ein 2-dim Vektorraum über dem Körper K und $\mathcal{A} = \mathrm{AG}(V)$ die zugehörige affine Ebene; seien ferner

$$g = p + mK \quad \text{und} \quad h = q + nK \quad (\text{insbeondere mit } m, n \neq 0)$$

zwei verschiedene Geraden von $\mathcal{A}$. Zeigen Sie:
g und h sind disjunkt (, also parallel im elementargeometrischen Sinne,)
genau dann, wenn gilt:
$mK = nK$ (, also g und h parallel im Sinne der analytischen Geometrie sind).

Lösungshinweis. Beachten Sie $q - p \in V = mK + nK$ im Falle $mK \neq nK$.

Lösungsskizze

"$\Leftarrow$" Im Falle $mK = nK$ sind die Geraden Nebenklassen zum gleichen Unterraum, daher entweder gleich (was wegen $g \neq h$ hier nicht vorliegt) oder disjunkt. [Eigenschaft von Nebenklassen.
Beweis: $p + mK \cap q + mK \neq \emptyset \Rightarrow \exists k_1, k_2 \in K : p + mk_1 = q + mk_2 \Rightarrow$ $\exists k_1, k_2 \in K : p + mK = \underbrace{q + m(k_2 - k_1)}_{p} + mK = q + mK$.]

"$\Rightarrow$" Seien g und h disjunkt. Wäre $nK \neq mK$, so $mK + nK \supset mK$ und aus Dimensionsgründen daher $mK + nK = V$; daher existieren $k_1, k_2 \in K$ mit (s. Lösungshinweis) $q - p = nk_1 + mk_2$, also

$$p + mk_2 = q - nk_1 \in p + mK \cap q + nK = g \cap h,$$

ein Widerspruch. $\square$