

## Übung zum Lehkräfteweiterbildungskurs 'Geometrie'

### Aufgabe A5 (Affine Ebene, analytisch)

Zeigen Sie, dass die Diagonalen eines nicht-ausgearteten Parallelogramms in der affinen Geometrie  $AG(V)$  eines  $K$ -Vektorraumes  $V$  mit  $\dim_K V = 2$  genau dann nicht parallel sind, wenn in  $K$  die Aussage  $1 + 1 \neq 0$  gilt.

**Lösungsskizze:** Seien  $\vec{a} = \vec{PR} = \vec{QS}$  und  $\vec{b} = \vec{PQ} = \vec{RS}$  die beiden durch das gegebene Parallelogramm bestimmten Vektoren von  $AG(V)$ .

Zu den Diagonalen gehören dann die Vektoren

$$\vec{PS} = \vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{b} \quad \text{und} \quad \vec{RQ} = \vec{b} - \vec{a}.$$

Es existiert dann ein Schnittpunkt  $T = RQ \cap PS$  genau dann, wenn es Skalare  $\mu, \lambda \in K$  gibt mit

$$(\vec{PT} =) \lambda \vec{PS} = \vec{a} + \mu \vec{RQ}, \quad \text{d.h.} \quad \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} + \mu(\vec{b} - \vec{a}).$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist diese Gleichung genau dann erfüllt, wenn

$$\begin{cases} \lambda = 1 - \mu \\ \lambda = \mu \end{cases}, \quad \text{also} \quad 2\mu = 1 \quad (\text{und} \quad \lambda = \mu)$$

gilt. Diese Bedingung ist aber dann und nur dann erfüllbar, wenn das Element  $2 := 1 + 1 \in K$  eine Inverse besitzt, also ungleich 0 ist.  $\square$