Übung zum Lehrkräfteweiterbildungskurs 'Geometrie'

Aufgabe A4 (Endliche affine Ebene)

(a) Geben Sie (ohne Beweis) die Verknüpfungstafeln von $\mathbb{F}_7$ =GF(7) an! Woran sieht man z.B. die Existenz einer additiven bzw. multiplikativen Inversen zu jedem Element ungleich 0 ?

(b) Bei einer psychologischen Untersuchung sollen 49 Testpersonen einer Reihe von Tests unterzogen werden. Um nicht jede Person allen Tests unterwerfen zu müssen, sollen zu einer Testklasse jeweils 7 disjunkte Gruppen zu sieben Personen gebildet werden. Während der ganzen Versuchsreihe sollen zudem je zwei Personen genau einmal gemeinsam in einer Gruppe sein.
Zeigen Sie , dass ein solches Test-Design existiert und dass unter diesen Bedingungen insgesamt 56 Testgruppen, also acht Testklassen, gebildet werden können.

Lösungsskizze:

(a)

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

·	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

Da in jeder Zeile bzw. Spalte der Tafel der Addition eine 0 steht, hat jedes Element eine additive Inverse. Folgerung ist auch, dass jedes Element genau einmal in jeder Zeile und jeder Spalte (ohne die beiden Ränder) steht.
Analog findet man in jeder Zeile (bzw. Spalte) der Tafel der Multiplikation (ohne die Nullspalte bzw. Nullzeile) eine 1; daher hat jedes Element ungleich 0 eine multiplikative Inverse. Folgerung ist auch, dass jedes Element genau einmal in jeder Zeile und jeder Spalte des rechten unteren 6×6 -Quadrats) vorkommt.

(b) Die 49 Testpersonen können wir bijektiv den Punkten der affinen Ebene $\mathcal{A} :=\text{AG}(K^2)$ über dem Körper $K = \text{GF}(7)$ zuordnen:
$\{(x, y) \,|\, x, y \in \text{GF}(7)\}$ enthält ja genau 7^2 Elemente.
Jede Gerade von $\mathcal{A}$ hat die Mächtigkeit 7, sodass die Geraden als die gesuchten Gruppen und jede Parallelenklasse als Klasse von 7 disjunkten Gruppen aufgefasst werden können. Je zwei Punkte (entsprechend zwei Testpersonen) bestimmen eindeutig eine Gerade; somit sind je zwei Personen in genau einer der gebildeten Gruppen. Damit sind die geforderten Testbedingungen erfüllt.
Nun gibt es $\frac{49-1}{6} = 8$ Parallelenscharen (Anzahl der Geraden durch einen festen Punkt), also 8 Testklassen zu je 7 Gruppen, insgesamt also 56 Testgruppen. $\square$