Übung zum Lehrkräfteweiterbildungskurs 'Geometrie'

Aufgabe A0 (Ebenenaxiom in $\mathrm{AG}(\mathbb{R}^3)$)
Zeigen Sie, dass im affinen reellen Raum $\mathrm{AG}(\mathbb{R}^3)$ das folgende Ebenenaxiom gilt:
(I3) Zu je drei nicht-kollinearen Punkten A, B, C gibt es genau eine Ebene F, mit der A, B und C inzidieren. Zu jeder Ebene F gibt es mindestens 3 auf ihr liegende nicht-kollineare Punkte.

Lösungshinweis. Beachten Sie, dass Ebenen in $\mathrm{AG}(\mathbb{R}^3)$ als 2-dim affine Unterräume und Geraden als 1-dim affine Unterräume von $\mathbb{R}^3$ definiert sind.

Lösungsskizze

1. Seien a, b und c die Ortsvektoren der Punkte A, B bzw. C (die wir mit ihnen identifizieren). Durch entsprechende Parameterwahl sieht man, dass
$$F = \{a + \lambda(b-a) + \mu(c-a) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$
eine Ebene durch A, B und C ist. (Dreipunkte-Ebenengleichung)
Zu zeigen ist nun die Eindeutigkeit von F.

2. Sei F' eine Ebene durch A, B und C und z.B. a ein Stützvektor von F'! Dann existiert ein Unterraum U der Dimension 2 von $\mathbb{R}^3$ mit $F' = a+U$. Aus $b, c \in F'$ erhält man
$$b = a + u_B \quad \text{und} \quad c = a + u_C \quad \text{für geeignete} \quad u_B, u_C \in U.$$
Es folgt: $(b-a), (c-a) \in U$. Wenn $(b-a)$ und $(c-a)$ sich als linear unabhängig erweisen, dann ist (wegen $\dim_{\mathbb{R}} U = 2$)
$$U =< (b-a), (c-a) >$$
und damit $F = F'$.
Wären $(b-a)$ und $(c-a)$ linear abhängig, so gäbe es ein $\nu \in \mathbb{R}$ mit $(b-a) = \nu(c-a)$, also $b \in a + (c-a)\mathbb{R}$, d.h. B läge auf der Geraden AC, im Widerspruch zur Forderung, dass A, B, C nicht kollinear sind.

3. Sei $F = a + U$ mit $2-$ dim Unterraum $U =< b', c' >$ eine Ebene . Zunachst folgt, dass $a, a+b', a+c'$ die Ortsvektoren dreier Punkte aus F sind; wären diese kollinear, so läge $a + c'$ auf der Geraden
$$g = a + (a + b' - a)\mathbb{R},$$
also wäre $a + c' = a + \rho b'$ (für geeignetes $\rho \in \mathbb{R}$), woraus die lineare Abhängigkeit von b' und c' folgte, ein Widerspruch zu $\dim_{\mathbb{R}} U = 2$. $\square$