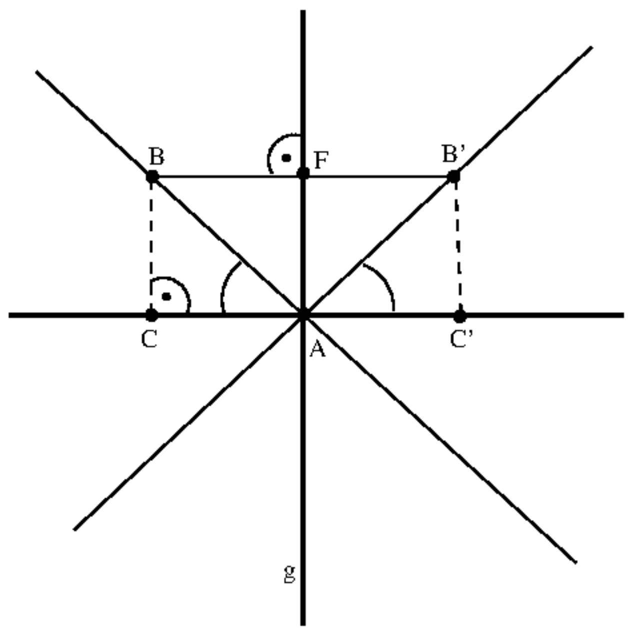
Übung zum Lehrkräfteweiterbildungskurs "Geometrie"

Aufgabe C11 (Geradenspiegelung) (Abwandlung von Skript-Aufgabe 67)

Sei E eine euklidische Ebene und g eine Gerade in E. Zu g definieren wir eine Geradenspiegelung γ_g wie folgt: Für $P \in E$ ist $\gamma_g(P)$ der eindeutig bestimmte Punkt P' mit $(P, F, P') \in Z$ und $|\overline{PF}| = |\overline{P'F}|$, wobei F der Fußpunkt des Lotes von P auf g ist. Mit den Bezeichnungen der folgenden Figur zeige man, ohne die Winkelgrößentreue und allgemeine Längentreue unbewiesen zu verwenden:

$$|\overline{BC}| = |\overline{B'C}| \quad \text{und} \quad |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle C'AB'|.$$



Lösungsskizze

(i) Nach Definition gilt $|\overline{BF}| = |\overline{B'F}|$ und $|\sphericalangle AFB| = R = |\sphericalangle AFB'|$ sowie $|\sphericalangle FAC| = R = |\sphericalangle FAC'|$. Mit dem Kongruenzsatz SWS (oder dem Satz des Pythagoras) erhält man $\Delta AFB \equiv \Delta AFB'$ und damit $|\overline{BA}| = |\overline{B'A}|$ und $|\sphericalangle ABF| = |\sphericalangle AB'F|$ sowie $|\sphericalangle BAF| = |\sphericalangle B'AF|$.

(ii) Mithilfe des Wechselwinkelsatzes und den obigen Kongruenzen sieht man $|\sphericalangle C'AB'| = |\sphericalangle AB'F| = |\sphericalangle FBA| = |\sphericalangle BAC|$, nach dem Kongruenzsatz SWS folglich $\Delta ABC \equiv \Delta AB'C'$ und $|\overline{BC}| = |\overline{B'C'}|$.

Statt mit (ii) kann man auch wie folgt argumentieren:

(ii') Aus $|\overline{AB}| = |\overline{AB'}|$ und $|\overline{AC}| = |\overline{AC'}|$ sowie $|\sphericalangle BAC| = R - |\sphericalangle BAF| = R - |\sphericalangle B'AF| = |\sphericalangle C'AB'|$ folgt $\Delta ABC \equiv \Delta AB'C'$ und damit die Behauptung.