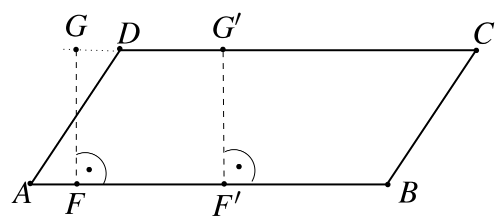
Übung zum Lehrerweiterbildungskurs ’Geometrie’

Aufgabe E8 (Parallelogramm) (Aufgabe 97 a)
Sei $\lozenge ABCD$ ein Parallelogramm der reellen euklidischen Ebene. Zeigen Sie, dass jede Höhe zur Grundseite $\overline{AB}$ die gleiche Länge h_{AB} hat!
Hinweis:
“Höhe” des Parallelogramms heißt dabei eine jede Strecke, deren Endpunkte auf den beiden Geraden von gegenüberliegenden Seiten liegen und die auf einer der beiden Seiten (und damit auf beiden) senkrecht steht.
Ohne Beweis benutzen dürfen Sie hier: Sätze über Stufenwinkel und Eigenschaften von Rechtecken.
Anmerkung: Von den Eigenschaften des Parallelogramms wird nur verwandt, dass die gegenüberliegenden Seiten parallel sind. Also eigentlich ist zu zeigen, dass zwei parallele Geraden “überall” den gleichen Abstand haben.



Lösungsskizze:

Seien F und F' die beiden Fußpunkte der Höhen auf AB sowie G und G' die zugehörigen Endpunkte auf CD.

Definitionsgemäß sind $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ parallel; damit folgt $\overline{FF'} \parallel \overline{GG'}$ und wegen der kongruenten Stufenwinkel auch $\overline{FG} \parallel \overline{F'G'}$. Daher ist das Viereck $\square FF'G'G$ ein Rechteck. In einem Rechteck sind aber gegenüberliegende Seiten, also insbesondere die beiden Höhen des Parallelogramms, gleich lang.

Alternative Argumentation: Die Translation $\tau := \tau_{FF'}$ lässt die Spurgeraden fest (also außer AB auch CD) und bildet Geraden auf parallele Geraden ab. Daher gilt neben $\tau(F) = F'$ auch $\tau(G) = G'$. Aus der Längentreue von Translationen folgt die Behauptung.