# Übung zum Lehrerweiterbildungskurs 'Geometrie'

**Aufgabe E7** (Kreis-Sehne, Mittelsenkrechte, Kathetenlänge)
Sei $\mathcal{K} := \mathcal{K}_{M,r}$ der Kreis mit Radius $r$ um den Punkt $M$ in der reellen euklidischen Ebene. Bezeichne $\mathrm{Inn}(\mathcal{K})$ die offene Kreisscheibe, also

$$\mathrm{Inn}(\mathcal{K}) := \{P \,|\, P \text{ Punkt der Ebene mit } |\overline{PM}| < r\}.$$

Zeigen Sie (die anschaulich selbstverständliche Behauptung):
Sind $A$ und $B$ Punkte des Kreises, so liegt jeder von $A$ und $B$ verschiedene Punkt der Strecke $\overline{AB}$ im Innern des Kreises, d.h. es gilt $\overline{AB} \subseteq \mathrm{Inn}\,(\mathcal{K}) \cup \{A,B\}$.

**Lösungsskizze:**

Sei $m_{AB}$ das Lot von $M$ auf $\overline{AB}$; wegen $|\overline{MA}| = r = |\overline{MB}|$ ist $m_{AB}$ die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$. Ist $F$ der Fußpunkt des Lots, so sei $s := |\overline{MF}|$. Für die Länge $s$ der Kathete des rechtwinkligen Dreiecks $\Delta MAF$ gilt $s < r$. Wir zeigen für jeden Punkt $Q$ von $\overline{AB} \setminus \{A,B\}$, dass $q := |\overline{MQ}| < r$: Für $F$ ist dies schon gezeigt; setzt man nun $t := |\overline{AQ}|$ und $u := |\overline{QF}|$ für $Q \in \overline{AF} \setminus \{A,F\}$, so folgt nach Pythagoras

$$r^2 = s^2 + (t+u)^2 \qquad \text{und} \qquad q^2 = s^2 + u^2,$$

woraus $q^2 < r^2$ und damit

$$q < r$$

(und nebenbei $q \geq s$) folgt.

Für Punkte $Q \in \overline{FB}$ gilt das Analoge.