Übung zum Lehrerweiterbildungskurs 'Geometrie'

Aufgabe E5 (Rechteck)

Sei $\mathcal{R} = \square\!\square ABCD$ ein nicht-quadratisches Rechteck der reellen euklidischen Ebene!
Zeigen Sie, dass die Gerade durch die Mittelpunkte M_1 und M_2 der sich gegenüberliegenden Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ senkrecht zu AB und CD ist.

Hinweis:
Ohne Beweis dürfen Eigenschaften von Translationen benutzt werden und die Tatsache, dass in einem Rechteck gegenüberliegende Seiten nicht nur parallel, sondern auch gleich lang sind.
Lösungsskizze:
1.Möglichkeit:
Die Strecken $\overline{AM_1}$ und $\overline{DM_2}$ sind gleich lang und parallel (s. Lösungshinweis) ; das Viereck AM_1M_2D ist daher und wegen der rechten Winkel bei A und D ein Rechteck. Damit ist gezeigt, dass $AB \perp M_1M_2 \perp CD$ gilt.
2.Möglichkeit:
Die Mittelsenkrechte m_{AB} von $\overline{AB}$ geht durch M_1 und schneidet die Gerade CD in einem Punkt F. Wegen der Parallelität von AB und CD sind die entsprechenden Stufenwinkel kongruent; somit steht m_{AB} auch senkrecht auf CD. Damit ist $\square\!\square AM_1FD$ ein Rechteck, folglich $|\overline{AM_1}| = |\overline{DM_2}|$ und $M_2 = F$.
3.Möglichkeit:
Bei der Translation τ, die A auf D abbildet, ist C das Bild von B (Parallelogrammkonstruktion). Unter τ wird der Mittelpunkt M_1 der Strecke $\overline{AB}$ auf den Mittelpunkt M_2 der Strecke $\overline{CD}$ abgebildet (Translation als längenerhaltende Kollineation). Die Spuren AD und M_1M_2 von τ sind parallel, also gilt $M_1M_2 \perp AB$.