Übung zum Lehrerweiterbildungskurs ’Geometrie’

Ergänzende Aufgabe E3 (Goldener Schnitt)
Als *goldenen Schnitt* bezeichnet man das Teilverhältnis einer Strecke, bei dem das Verhältnis des “Ganzen” zum größeren “Teil” dem Verhältnis des größeren zum kleineren Teil entspricht (s. Abbildung 1), also $a : x = x : (a - x)$ gilt.

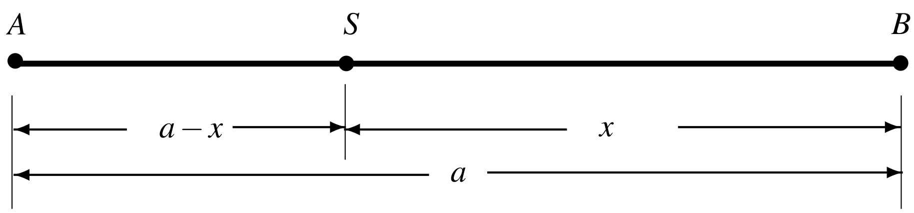

Abbildung 1

(1) Beweisen Sie, dass folgende zwei Konstuktionen (Abbildung 2 und Abbildung 3) die Strecke $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt teilen.

(i)

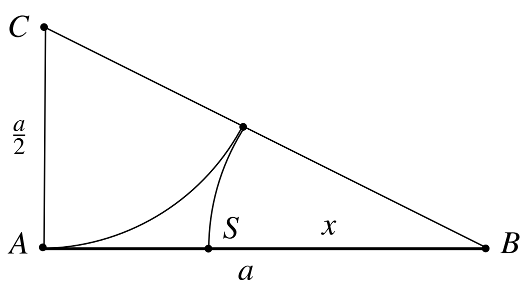

Abbildung 2

(ii)

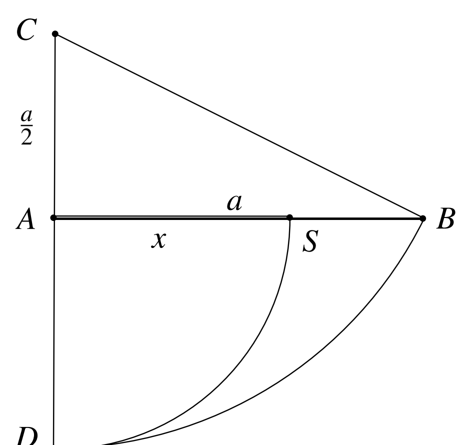

Abbildung 3

(2) Zeigen Sie, dass die Konstruktion gemäß Abbildung 4 zur Strecke $\overline{AS}$ der Länge b einen Punkt B liefert, derart dass S die Strecke $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt teilt (sogenannte " äußere Teilung" im goldenen Schnitt). Dabei bezeichne M den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AS}$.

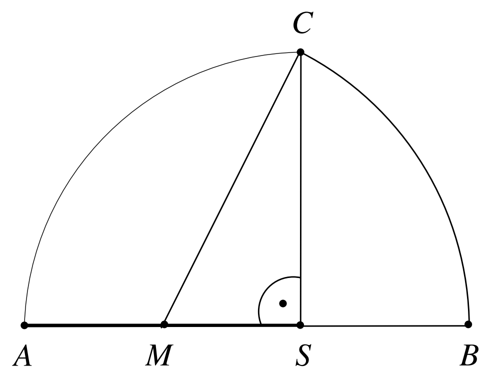

Abbildung 4

Lösungsskizze:
(Vgl. auch Wikipedia: Goldener Schnitt)
Vorbemerkung:
$a : x = x : (a-x)$ ist (für $0 \neq x \neq a$) äquivalent zur Gleichung $x^2 + ax - a^2 = 0$, die genau die Lösungen $x = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}a\sqrt{5}$ hat. Wegen $x > 0$ erhält man

$$(*) \qquad x = \frac{1}{2}a(\sqrt{5}-1).$$

Als Quotient bei der Teilung im Goldenen Schnitt erhalten wir also

$$(**) \qquad \tau = \frac{a}{x} = [\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)]^{-1} = 2\frac{\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) \approx 1,6180.$$

(1)(i) Zu Abbildung 2:
Nach dem Satz des Pythagoras gilt für $c := |\overline{BC}|$ die Gleichung

$$c^2 = a^2 + (\frac{a}{2})^2,$$

aus der $c^2 = \frac{5}{4}a^2$ und wegen $c > 0$ dann $c = \frac{1}{2}a\sqrt{5}$ und damit

$$x = c - \frac{a}{2} = \frac{1}{2}a(\sqrt{5}-1)$$

folgt. Aus Gleichung $(*)$ ergibt sich dann die Behauptung.

(1)(ii) Zu Abbildung 3:
Analog zu Abbildung 2 gilt auch hier: $|\overline{BC}|^2 = c^2 = a^2 + (\frac{a}{2})^2$ und $c = \frac{1}{2}a\sqrt{5}$. Daraus erhält man $x = |\overline{AD}| = c - \frac{a}{2}$ und damit wie in (i) die Gleichung $(*)$.

(2) Zu Abbildung 4:
Laut Konstruktion ist $|\overline{AS}| = |\overline{SC}|$ und $|\overline{MB}| = |\overline{MC}|$ und (nach dem Satz des Pythagoras)

$$|\overline{MB}| = |\overline{MC}| = \sqrt{b^2 + (\frac{b}{2})^2} = \frac{1}{2}b\sqrt{5},$$

also wunschgemäß

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AS}|} = \frac{|\overline{MB}| + \frac{b}{2}}{b} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1),$$

vgl. (1ii)!