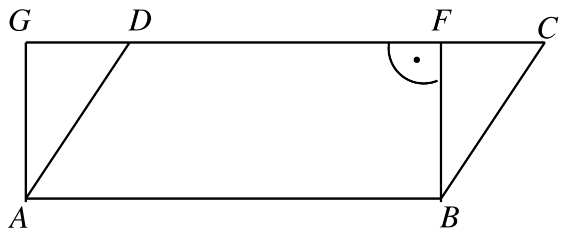
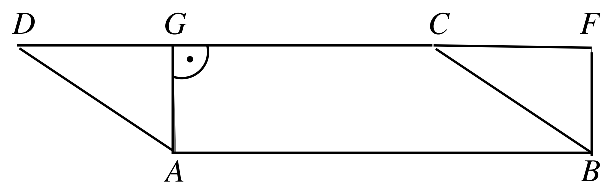
Übung zum Lehrerweiterbildungskurs 'Geometrie'

Aufgabe E1 (Zerlegungsgleichheit)
Zeigen Sie: In der reellen euklidischen Ebene ist jedes Rechteck $\square\square ABFG$ zerlegungsgleich mit jedem Parallelogramm $\Diamond ABCD$, das die gleiche Grundseite $\overline{AB}$ wie das Rechteck hat, dessen Höhe $h = h_{AB}$ gleich der Länge $|\overline{BF}|$ einer Seite des Rechtecks ist und von dessen Eckpunkten einer auf der Seite $\overline{FG}$ liegt.



bzw.



Hinweis: Ohne Beweis dürfen Sie hier die Kongruenzsätze für Dreiecke, (andere) Eigenschaften von Rechtecken, Eigenschaften von Stufenwinkeln bzw. von Translationen benutzen.
Anmerkung: Diese Aufgabe führt zu einem etwas anderen Beweis der Sätze 18.11 und 18.12 des Skripts.

Lösungsskizze:

Sind das gegebene Rechteck und das gegebene Parallelogramm gleich, ist nichts zu zeigen. Seien also G und D verschieden und damit auch $F \neq C$. Aus Skript-Aufgabe 97a folgt, dass die Punkte C, D, F und G kollinear sind.
Wir betrachen die Dreiecke $\Delta_1 := \Delta ADG$ und $\Delta_2 := \Delta BCF$. Diese sind beide rechtwinklig (mit den rechten Winkeln bei F und G) und erfüllen $\sphericalangle GAD \equiv \sphericalangle FBC$ (z.B. durch Anwendung von τ_{AB} zu sehen) sowie $|\overline{AG}| = |\overline{FB}|$ (gegenüberliegende Seiten eines Parallelogramms – also insbesondere eines Rechtecks– sind kongruent, vgl. Aufgabe 16!). Nach dem Kongruenzsatz WSW sind Δ_1 und Δ_2 kongruent.
Zu zeigen bleibt, dass der Durchschnitt von Rechteck und Parallelogramm durch eins der Dreiecke zum Rechteck, durch das andere Dreieck zum Parallelogramm ergänzt wird. Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass von den beiden Eckpunkten C und D des Parallelogramms wegen $|\overline{CD}| = |\overline{AB}| = |\overline{FG}|$ nicht beide innerhalb $\overline{FG}$, der entsprechenden Seite des Rechtecks, und (nach Voraussetzung) nicht beide außerhalb dieser Seite liegen können. $\square$