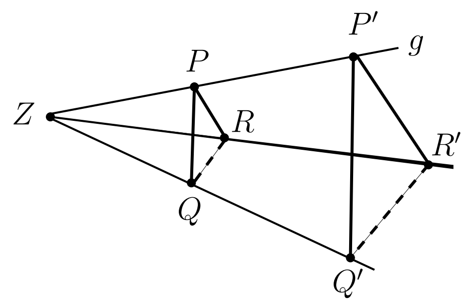
Übung zum Lehrkräfteweiterbildungskurs 'Geometrie'

Aufgabe A7 (Zentrische Streckungen und der Satz von Desargues)

In einer affinen Ebene $\mathcal{A}$ sei Δ_Z die Gruppe der zentrischen Streckungen mit Zentrum (Fixpunkt) Z; für eine Gerade g aus $\mathcal{A}$ mit $Z \in g$ sei Δ_Z transitiv auf der Punktmenge $g \setminus \{Z\}$ (d.h.

$\forall P, P' \in g \setminus \{Z\} \; \exists \, \delta \in \Delta_Z \quad \text{mit} \quad \delta(P) = P'$).



Zeigen Sie, dass dann je zwei disjunkte Dreiecke in perspektiver Lage zum Zentrum Z und Eckpunkten auf g dem affinen Satz von Desargues genügen, d.h. dass gilt: Sind $P, P' \in g \setminus \{Z\}$ bzw. $Q, Q' \notin g$ und $R, R' \notin g$ jeweils mit Z kollineare verschiedene Punkte, und sind in den Dreiecken ΔPQR und $\Delta P'Q'R'$ zwei der Seitenpaare parallel, also $PQ \parallel P'Q'$ und $PR \parallel P'R'$, so ist auch das dritte Seitenpaar parallel, also $QR \parallel Q'R'$.

Anmerkung: Man kann zeigen, dass umgekehrt aus der Gültigkeit des Satzes von Desargues die Transitivität der Gruppe Δ_Z folgt.

Lösungsskizze

Nach Voraussetzung existiert ein $\delta \in \Delta_Z$ mit $\delta(P) = P'$. Da bei zentrischen Streckungen Geraden auf parallele Geraden abgebildet werden, folgt

$$\delta(PQ) \parallel PQ \quad \text{und} \quad \delta(PR) \parallel PR \quad \text{sowie} \quad \delta(QR) \parallel QR.$$

Die Gerade

$$\delta(PQ) = \delta(P)\delta(Q) = P'\delta(Q)$$

ist wegen der Eindeutigkeit der Parallelen zu PQ durch P' (Euklidisches Parallelenaxiom) gleich $P'Q'$; die Eindeutigkeit des Schnittpunktes von $P'Q'$ bzw. $P'\delta(Q)$ mit ZQ zeigt $Q' = \delta(Q)$; analog sieht man wegen $\delta(PR) = P'\delta(R) \parallel PR$ auch $\delta(R) = R'$. Es folgt

$$\delta(QR) = \delta(Q)\delta(R) = Q'R' \parallel QR$$

(auch im Falle $R, R' \in ZQ$). $\square$