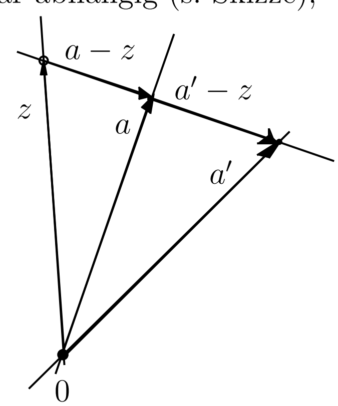
Übung zum Lehrerweiterbildungskurs 'Geometrie'

Aufgabe A12 (Dehnungen, auch analytisch)
Zeigen Sie, dass es im 3-dimensionalen affinen Raum $\mathcal{A}$ =AG$(3, K)$ außer den Abbildungen

$\tau_p :$	$K^3 \to K^3$	mit	$x \mapsto x + p$	(für $p \in K^3$) und
$\delta_{p,k} :$	$K^3 \to K^3$	mit	$x \mapsto (x - p)k + p$	(für $p \in K^3, k \in K \setminus \{0\}$)

keine weiteren Dehnungen von $\mathcal{A}$ gibt!
Hinweis: Ohne Beweis dürfen Sie hier Eigenschaften von Dehnungen eines 3-dim affinen Raumes verwenden, außerdem die Tatsache, dass τ_p und $\delta_{p,k}$ Dehnungen sind.
Untersuchen Sie zunächst, ob es eine Translation τ_p (also ein $p \in K^3$) gibt derart, dass τ_p ein gegebenes $a \in K^3$ auf ein gegebenes $a' \in K^3$ abbildet!

Lösungsskizze
(i) Laut Hinweis kann man hier davon ausgehen, dass $\delta_{p,k}$ und τ_p Dehnungen sind; τ_p ist für $p \neq 0$ fixpunktfrei, also Translation; $\delta_{p,k}$ hat den Fixpunkt p, ist also zentrische Streckung. Außerdem ist τ_0 =id= $\delta_{0,1}$.
Gegeben sei nun eine Translation τ, sei $a \in K^3$ fest gewählt und $a' := \tau(a)$. Durch $a' = \tau_p(a) = a + p$ für $p := a' - a$ sieht man, dass die Translation $\tau_{a-a'}$ den Punkt a auf den Punkt a' abbildet. Nun ist eine Translation schon durch ein Urbild-Bild-Paar festgelegt; wegen $\tau(a) = a' = \tau_{a'-a}(a)$ ist τ gleich $\tau_{a'-a}$. Es gibt also keine weiteren Translationen außer den angebenen. (ii) Sei nun δ eine Dehnung (ungleich id) mit Zentrum z und $a' := \delta(a)$ für ein festes $a \in K^3 \setminus \{z\}$. Wegen der Kollinearität von Zentrum, Punkt a und Bildpunkt a' gilt $a' \in za$; folglich sind $a - z$ und $a' - z$ linear abhängig (s. Skizze);



es existiert also ein $k_1 \in K \setminus \{0\}$ mit

$$a' - z = (a - z)k_1.$$

Die zentrische Streckung δ_{z,k_1} hat den Fixpunkt z und bildet wegen

$$\delta_{z,k_1}(a) = (a - z)k_1 + z = a' - z + z = a'$$

wie δ den Punkt a auf den Punkt a' ab. Eine zentrische Streckung ist aber schon durch das Zentrum und ein Urbild-Bildpunkt-Paar eindeutig bestimmt. Folglich gilt $\delta = \delta_{z,k_1}$. Es gibt also auch keine weiteren zentrischen Streckungen außer den angegebenen. $\square$