Nachklausur Geometrie (90 minütige Klausur) zur Lehrkräfteweiterbildung Mathematik am 22.6.2021

Name, Vorname	Aufg.1	Aufg.2	Aufg.3	Aufg.4	Σ	%	Note
Punkte $\rightarrow$							

Bearbeiten Sie bitte **drei der vier** Augaben! Falls Sie alle vier Aufgaben bearbeitet haben sollten, kennzeichnen Sie bitte, welche drei Aufgaben gewertet werden sollen! Zur vollständigen Lösung einer Aufgabe gehört, wenn nicht anders angegeben, auch die (stilistisch einwandfreie zielführende) **Darstellung des Gedankenganges**. Pro gelöster Aufgabe erhalten Sie 10 Punkte. Eigener nicht-programmierbarer Taschenrechner ist erlaubt.

Aufgabe 1 (Affiner Raum, parallele Ebenen, parallele Geraden, Translation)

Seien $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{E})$ ein 3-dim affiner Raum und $E \in \mathcal{E}$, also eine Ebene, sowie g und h Geraden mit $g, h \subseteq E$ und $g \nparallel h$. Sei ferner $P \in \mathcal{P}$ mit $P \notin E$.

(i) (1 Punkt) Gemäß welchem Axiom existieren Geraden $g', h' \in \mathcal{G}$ mit $P \in g'$ und $g' \parallel g$ sowie $P \in h'$ und $h' \parallel h$? Bitte nur den Namen des Axioms angeben!

(ii) (3 Punkte) Wieso gilt dann $|g' \cap h'| = 1$?

(iii) (3 Punkte) Zeigen Sie: g' und h' liegen in einer Ebene E'.

(iv) (3 Punkte) Begründen Sie: Es gibt eine Translation τ von $\mathcal{A}$ mit

$$\tau(g) = g', \quad \tau(h) = h' \quad \text{und} \quad \tau(E) = E' \;\; !$$

Dabei dürfen Sie hier unbewiesen verwenden, dass $E \parallel E'$ gilt.

Aufgabe 2 (Dehnungen, offenes Intervall, Pasch-Axiom)

(a) Seien $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{E})$ ein geordneter 3-dim affiner Raum, $g \in \mathcal{G}$ eine Gerade, τ ($\neq$ id) eine Translation mit $\tau(g) \neq g$. Seien ferner $P, Q \in g$ mit $P \neq Q$ und mit $Q \notin P\tau(P)$.

  (i) (3 Punkte) Warum liegt $[Q, \tau(Q)]$ in der Halbebene $P\tau(P)Q^+$?

  (ii) (3 Punkte) Zeigen Sie (ohne Verweis auf den Satz über die Erhaltung der Zwischenrelation), dass für $R \in]P, Q[$ gilt:

$$\tau(R) \in]\tau(P), \tau(Q)[.$$

  Lösungshinweis. Betrachten Sie die Gerade $R\tau(R)$ und geeignete Dreiecke mit Seite $\overline{Q\tau(P)}$.

(b) (4 Punkte) Sei σ eine zentrische Streckung des geordneten 3-dim affinen Raums $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{E})$ mit Zentrum Z; seien ferner $\sigma \neq \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$ und $R \in \mathcal{P} \setminus \{Z\}$.
Zeigen Sie: $R\sigma(R)$ bleibt fix unter σ.

Aufgabe 3 (Winkel, Lot, Kongruenzsätze)

Sei E eine Ebene in der absoluten Geometrie. In E werde an eine Halbgerade $p = OA^+$ ein beliebiger Winkel (ungleich einem Nullwinkel oder einem gestreckten Winkel) nach beiden Seiten von OA angetragen: Auf den freien Schenkeln werden jeweils von O aus kongruente Strecken $\overline{OB}$ bzw. $\overline{OC}$ abgetragen.

(i) (1 Punkt) Warum existiert $D := BC \cap OA$?

(ii) (2 Punkte) Sie dürfen hier vom Fall $D \in OA^+ \setminus \{O\}$ für den Punkt D aus Aufgabenteil (i) ausgehen. Nach welchem Kongruenzsatz gilt $\Delta OBD \equiv \Delta OCD$? (Bitte nur die Kurzform ohne Begründung angeben!)

(iii) (2 Punkte) Begünden Sie: $\sphericalangle BDO$ ist ein rechter Winkel.

(iv) (3 Punkte) Sei nun P ein Punkt von E mit $P \notin OA$. Wieso folgt aus den vorigen Teilen der Aufgabe die Existenz eines Lots ℓ von P auf die Gerade OA ?

(v) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass es außer ℓ kein weiteres Lot von P auf OA gibt.

Aufgabe 4 (Winkelhalbierende, Geradenspiegelung)

Sei $\Delta := \Delta ABC$ ein (nicht-ausgeartetes) Dreieck in der euklidischen Ebene E; seien ferner $w_\alpha, w_\beta, w_\gamma$ die Winkelhalbierenden der Innenwinkel von Δ , deren Existenz hier vorausgesetzt sei. Auch dürfen Sie hier voraussetzen, dass w_α und w_β nicht parallel sind. Ferner bezeichne γ_h die Geradenspiegelung mit einer Geraden h von E als Achse; auch deren Existenz sei jeweils bekannt. Beweisen Sie die Existenz des Schittpunktes der drei Winkelhalbierenden von Δ wie folgt:

(i) (1 Punkt) Warum existiert $\{W\} := w_\alpha \cap w_\beta$?

(ii) (2 Punkte) Seien g das Lot von W auf AB sowie $\gamma := \gamma_{w_\alpha} \circ \gamma_g \circ \gamma_{w_\beta}$. Bestimmen Sie (ohne weitere Begründung) $\gamma(BC)$ und $\gamma(W)$!

(iii) (1 Punkt) Zeigen Sie: $\gamma(h) \cap h$ bleibt für jede Gerade h von E unter γ fix. *Lösungshinweis:* Ohne Beweis dürfen Sie hier benutzen, dass nach dem Dreispiegelungssatz γ eine Geraden-Spiegelung ist.

(iv) (3 Punkte) Begründen Sie (unter Verwendung der vorigen Aufgabenteile): $\gamma(C) = C$!

(v) (2 Punkte) Welche Gerade hat γ als Spiegelungsachse? (Angabe hier ohne Begründung!)

(vi) (1 Punkt) Warum gilt $W \in w_\gamma$ und damit der Satz über den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden eines Dreiecks?