Modulprüfung Geometrie (90 minütige Klausur) zur Lehrkräfteweiterbildung Mathematik am 2.6.2021

Name, Vorname	Aufg.1	Aufg.2	Aufg.3	Aufg.4	Σ	%	Note
Punkte $\rightarrow$							

Bearbeiten Sie bitte **drei der vier** Augaben! Falls Sie alle vier Aufgaben bearbeitet haben sollten, kennzeichnen Sie bitte, welche drei Aufgaben gewertet werden sollen! Zur vollständigen Lösung einer Aufgabe gehört, wenn nicht anders angegeben, auch die (stilistisch einwandfreie zielführende) **Darstellung des Gedankenganges**. Pro gelöster Aufgabe erhalten Sie 10 Punkte. Eigener nicht-programmierbarer Taschenrechner ist erlaubt.

Aufgabe 1
(Affiner Raum, Ebenen, parallele Geraden, Parallelprojektion, Translation)

(a) Seien $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{E})$ ein 3-dim affiner Raum und $F \in \mathcal{E}$, also eine Ebene, sowie g und h Geraden mit $g, h \subseteq F$ und $g \nparallel h$.

  (i) (1 Punkt) Sei B Punkt von F mit $B \notin g$, ! Gemäß welchem Axiom existiert genau eine Gerade $g' \in \mathcal{G}$ mit $B \in g'$ und $g' \parallel g$. (Bitte nur den Namen des Axioms angeben!)

  (ii) (2 Punkte) Wieso gilt dann $g' \subseteq F$?

  (iii) (2 Punkte) Begründen Sie folgende Aussage:
  Es existiert zu $B \in g'$ genau ein Punkt $B' \in h$ mit $B' = g' \cap h$. (Dies ist eine Eigenschaft der Parallelprojektion π von F auf h längs g, die hier bewiesen werden soll.)

  (iv) (2 Punkte) Sei ℓ eine Gerade aus F mit $\ell \nparallel h$. Welche Möglichkeiten gibt es für das Bild $\pi(\ell)$ der Geraden ℓ je nach Lage von ℓ, (also ob $\ell \parallel g$ oder $\ell \nparallel g$) (mit der Parallelprojektion π wie in (iii) definiert)? (Angabe hier bitte ohne Beweis bzw. Gedankengang)

(b) (3 Punkte) Sei nun τ eine Translation mit $\tau \neq \mathrm{id}$ von $\mathcal{A}$. Zeigen Sie (ohne Verweis auf die Vorlesung), dass für alle $X \in \mathcal{P}$ gilt: $X\tau(X)$ ist eine Fixgerade.
Lösungshinweis: Betrachten Sie $\tau\big(\,X\tau(X)\,\big)$!

Aufgabe 2 (Parallelprojektion, offenes Intervall, Halbebene, Pasch-Axiom) Sei $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{E})$ ein geordneter 3-dim affiner Raum und $\Diamond ABCD$ ein Parallelogramm in einer Ebene E von $\mathcal{A}$; die Eckpunkte seien so bezeichnet, dass gilt: $AB \parallel CD$ und $AD \parallel BC$. Sei ferner H ein Punkt von $]CD[$. Zeigen Sie:

(i) (3 Punkte) Ist G der Bildpunkt der Parallelprojektion π von H längs AD auf AB, so liegt G zwischen A und B.

(ii) (3 Punkte) Die Punkte von $]HG[$ liegen in der Halbebene ADC^+.

(iii) (4 Punkte) Die Gerade GH und die Diagonale $]AC[$ haben einen Punkt gemeinsam.
Lösungshilfe: Betrachten Sie z.B. das Dreick ΔACD.

Aufgabe 3 (Winkel, Kongruenzsätze)

(a) (3 Punkte) Begründen Sie (ohne Verweis auf die entsprechende Aussage der Vorlesung): In einer Ebene der absoluten Geometrie sind freie Schenkel von kongruenten Stufenwinkeln parallel. (Hinweis: Dabei dürfen Sie Eigenschaften von Innen-und Außenwinkeln eines Dreiecks benutzen.) .

(b) (2 Punkte) Begünden Sie(ohne Verweis auf die entsprechende Aussage der Vorlesung): In der absoluten Geometrie ist jeder zu einem rechten Winkel $\sphericalangle(p, q)$ kongruente Winkel $\sphericalangle(r, s)$ ein rechter Winkel.

(c) Seien ΔABC und $\Delta A'B'C'$ zwei Dreiecke in einer absoluten Geometrie. Es gelte $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, ferner $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle C'A'B'$ und $\sphericalangle CBA \equiv \sphericalangle C'B'A'$. Beweisen Sie wie folgt den Kongruenzsatz WSW (ohne Verweis auf die Vorlesung):

(i) (1 Punkt) Nach welchem Axiom existiert ein Punkt $C'' \in A'C'^+$ mit $\overline{AC} \equiv \overline{A'C''}$? (Bitte nur den Namen des Axioms ohne Begründung angeben!)

(ii) (2 Punkte) Nach welchem Kongruenzsatz folgt $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C''$ und damit $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C''$? (Bitte ohne Begründung nur die Kurzform angeben!)

(iii) (2 Punkte) Nach welchem Axiom gilt daher $B'C'^+ = B'C''^+$, damit $C' = C''$? (Bitte ohne Begründung nur den Namen des Axioms angeben!)
Anmerkung: Mit $C' = C''$ ergibt sich der Kongruenzsatz WSW dann aus Teil (ii): $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'' = \Delta A'B'C'$.

Aufgabe 4 (Mittelsenkrechte, Geradenspiegelung)

Sei ΔABC ein (nicht-ausgeartetes) Dreieck in der euklidischen Ebene E; seien ferner m_a, m_b, m_c die Mittelsenkrechten auf den Seiten $a := \overline{BC}$, $b := \overline{AC}$ bzw. $c := \overline{AB}$, deren Existenz hier vorausgesetzt sei. Auch dürfen Sie hier voraussetzen, dass m_a und m_b nicht parallel sind. Ferner bezeichne γ_h die Geradenspiegelung mit der Geraden h von E als Achse; auch deren Existenz sei bekannt.

(i) (2 Punkte) Begründen Sie ohne Verwendung des Mittellotensatzes die Existenz von $M := m_a \cap m_b$!

(ii) (2 Punkte) Seien $g := MC$ sowie $\gamma := \gamma_{m_a} \circ \gamma_g \circ \gamma_{m_b}$. Bestimmen Sie (ohne weitere Begründung) $\gamma(A)$ und $\gamma(M)$!

(iii) (3 Punkte) Begründen Sie $\gamma(B) = A$! *Lösungshinweis:* Ohne Beweis dürfen Sie hier benutzen, dass nach dem Dreispiegelungssatz γ eine Spiegelung ist.

(iv) (2 Punkte) Begründen Sie $\gamma(m_c) = m_c$.

(v) Warum gilt $M \in m_c$ und damit der Satz über den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten (Mittellotensatz)?

Lösungsskizzen

ad Aufgabe 1

(a) (i) Euklidisches Parallelenaxiom

(ii) g und g' sind parallel aber nicht gleich (wegen $B \notin g$), nach Definition im 3-dimensionalen affinen Raum damit disjunkt und in einer Ebene liegend. Damit folgt aus $\{B\} \cup g \subseteq F$ auch $g' \subseteq F$, da 3 nicht-kollineare Punkte genau mit einer Ebene, hier F, inzidieren.

(iii) Aus $g' \parallel g \nparallel h$ und der Transitivität der Parallelitätsrelation ergibt sich $g' \nparallel h$. Als nicht-parallele Geraden aus der Ebene F schneiden sich g' und h daher in mindestens (und nach dem Geradengrundsatz (I 1)) in genau einem Punkt.

(iv) 1.Fall: $\ell \parallel g$; dann ist $\pi(\ell) = \ell \cap h$ ein Punkt.
2.Fall: $\ell \nparallel g$; dann ist $\pi(\ell) = h$.

(b) Nach Definition von 'Dehnung' gilt für die Translation τ, dass $AB \parallel \tau(A)\tau(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{P}$ mit $A \neq B$. Für $A = X$ und $B = \tau(X)$ folgt daraus:

$$X\tau(X) \parallel \tau(X)\tau(\tau(X)).$$

Da $\tau(X)$ auf beiden Parallelen liegt, aber verschiedene parallele Geraden disjunkt sind, und da Translationen Geraden auf Geraden abbilden, folgt

$$\tau(X\tau(X)) = \tau(X)\tau(\tau(X)) = X\tau(X).$$

ad Aufgabe 2

(i) Da bei einer Parallelprojektion die Zwischenrelation erhalten bleibt und $\pi(D) = A$ sowie $\pi(C) = B$ gilt, wird $H \in]DC[$ auf $G \in]AB[$ abgebildet.

(ii) Wegen $HG \parallel AD$ und $HG \neq AD$ schneidet $]HG[$ nicht AD; ferner ist H in]CD[. Daher liegen die Punkte von $]HG[$ in ADC^+.

(iii) Anwendung des Pasch-Axioms auf das Dreieck ΔACD zeigt, dass die Gerade GH entweder $]AD[$ oder $]AC[$ schneidet; der erste Fall ist wegen $HG \parallel AD$ nicht möglich.

ad Aufgabe 3

(a) Wären die (in einer Ebene liegenden) Schenkel nicht parallel, so hätten sie einen Schittpunkt. Es gäbe dann ein Dreieck, in dem ein Außenwinkel zu einem nicht-anliegenden Innenwinkel (evtl. Scheitelwinkel) kongruent wäre, schon in der absoluten Geometrie ein Widerspruch.

(b) Laut Voraussetzung gilt $\sphericalangle(p, q) \equiv \sphericalangle(r, s)$, ferner laut Definition von rechten Winkeln $\sphericalangle(p, q) \equiv \sphericalangle(p, q^-)$. Da Nebenwinkel kongruenter Winkel kongruent sind, und da die Kongruenz von Winkeln eine Äquivalenzrelation ist, folgt aus: $\sphericalangle(r, s) \equiv \sphericalangle(p, q)$ einerseits $\sphericalangle(r, s^-) \equiv \sphericalangle(p, q^-)$, andererseits damit

$$\sphericalangle(r, s^-) \equiv \sphericalangle(p, q^-) \equiv \sphericalangle(p, q) \equiv \sphericalangle(r, s)$$

und daraus die Behauptung.

(c) (i) nach dem Streckenabtragungsaxiom

(ii) mittels Kongruenzsatz SWS

(iii) nach dem Winkelantragungsaxiom

ad Aufgabe 4

(i) Dies gilt aufgrund der Definition der Parallelität von verschiedenen Geraden in einer Ebene.(Windschiefe Geraden liegen nicht in einer Ebene.)

(ii) $\gamma(A) = \gamma_{m_a} \circ \gamma_g \circ \gamma_{m_b}(A) = \gamma_{m_a} \circ \gamma_g(C) = \gamma_{m_a}(C) = B$ und $\gamma(M) = M$.

(iii) Da γ Spiegelung ist, gilt $\gamma^{-1} = \gamma$. Es folgt $\gamma(B) = \gamma^{-1}(B) = A$.

(iv) Da unter der Spiegelung γ die Punkte A und B vertauscht werden (siehe (iii)), muss die Achse von γ gleich der Mittelsenkrechten m_C von $\overline{AB}$ sein; als Achse von γ bleibt daher m_C fix.

(v) Als Fixpunkt der Spiegelung γ muss M auf der Achse von γ, also auf m_C, liegen.