

## Übungen zum Lehrkräfte Weiterbildungskurs "Lineare Algebra/Analytische Geometrie II"

### Aufgabe B6 (Basistransformation)

Sei  $B = (e_1, e_2)$  die kanonische Basis des  $\mathbb{R}$ - Vektorraums  $V = \mathbb{R}^2$ ; sei ferner

$$\begin{aligned}\tilde{b}_1 &:= e_1 + e_2 \\ \tilde{b}_2 &:= e_1 - e_2.\end{aligned}$$

1. Zeigen sie, dass  $\tilde{B} := (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2)$  ebenfalls eine Basis von  $\mathbb{R}^2$  ist.
2. Gegeben sei der Vektor  $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Bestimmen Sie den Koordinatenvektor  $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$  von  $x$  bzgl. der Basis  $\tilde{B}$  !

### Lösungsskizze

1. Aus  $\lambda(e_1 + e_2) + \mu(e_1 - e_2) = 0$  erhält man das LGS

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases}$$

und daraus  $\lambda = 0 = \mu$ .

*Alternativ:*  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ .

2. Es ist

$$M_{\tilde{B}}^B(\text{id}) = M_{\tilde{B}}^{\tilde{B}}(\text{id})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

(Kartesische Koordinaten von  $\tilde{b}_i$ , also der Bilder von  $\tilde{b}_i$  unter der Abbildung  $\text{id}$ , als Spalten der Matrix.!)

Nun gilt

$$M_{\tilde{B}}(x) = M_{\tilde{B}}^B(\text{id})M_B(x) = [M_{\tilde{B}}^{\tilde{B}}(\text{id})]^{-1}M_B(x).$$

Man erhält damit

$$M_{\tilde{B}}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \xi_1 + \xi_2 \\ \xi_1 - \xi_2 \end{pmatrix}.$$