Übungen zum Lehrkräfteweiterbildungskurs
"Lineare Algebra/Analytische Geometrie II"

Aufgabe W4 (Diagonalähnlichkeit, charakteristisches Polynom, Minimalpolynom)

Sei $$M = \begin{pmatrix} 0 & i \\ a^2\, i & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(2,2)} \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{C}!$$

Bestimmen Sie

1. das charakteristische Polynom χ_M von M
2. die Eigenwerte von M
3. das Minimalpolynom H_M von M

   und klären Sie,
4. für welche Werte a die Matrix M diagonalähnlich ist.

Lösungsskizze:

1. $$\chi_M(x) = \begin{vmatrix} -x & i \\ a^2 i & -x \end{vmatrix} = x^2 - a^2 i^2 = (x - ai)(x + ai).$$
2. Die Eigenwerte von M sind nach einem Satz aus der Vorlesung die Nullstellen von $\chi_M(x)$, als $\lambda_{1/2} = \pm ai$.
3. Die Eigenwerte λ_1 und λ_2 sind genau für $a \neq 0$ verschieden; da sie ebenfalls Nullstellen von H_M sein müssen und Grad $H_M = 2$ ist, folgt in diesem Fall $H_M = \chi_M$.

   Im Falle $a = 0$ ist $\chi_M(x) = x^2$. Für H_M gibt es daher nur die Möglichkeiten $H_M(x) = \chi_M(x) = x^2$ oder $H_M(x) = x$; der letztere Fall ist wegen $H_M(M) = M \neq 0$ nicht möglich.

   Also ist $H_M = \chi_M$ für jedes $a \in \mathbb{C}$.
4. Ist $a \neq 0$, so zerfällt χ_M bzw. H_M in verschiedene Linearfaktoren. Daher ist M gemäß entsprechender Sätze diagonalähnlich. Für $a = 0$ zerfällt H_M nicht in verschiedene Linearfaktoren, und M ist nicht diagonalähnlich.

Alternartive Argumentation im Fall $a = 0$: Ist $a = 0$, so ist die algebraische Vielfachheit von $\lambda = 0$ gleich 2, die geometrische hingegen 1 als Dimension des Lösungsraums des LGS's

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = 0.$$

Nach einem Satz ist daher M im Falle $a = 0$ nicht diagonalähnlich.