Übungen zum Lehrkräfteweiterbildungskurs "Lineare Algebra/Analytische Geometrie II"

Aufgabe W1 (Endomorphismus, Matrix, LGS, Eigenvektor)

(i) Seien K Körper, $V = K^{(n,1)}$ und $f \in \operatorname{End}_K V$. Zeigen Sie, dass die Menge der Fixvektoren von f

$$\mathrm{Fix} f := \{v \in V \mid f(v) = v\}$$

einen Unterraum von V bildet.

(ii) Bestimmen Sie $\mathrm{Fix} f_1$ (zur Definition siehe Teil (i)), falls $n = 3$ ist und f_1 bezüglich der kanonischen Basis B die Matrix

$$M_B^B(f_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

hat.

Lösungsskizze:

(i) Wegen $0 \in \mathrm{Fix} f$ reicht es (nach dem Unterraumkriterium) zu zeigen, dass mit v_1, v_2 aus $\mathrm{Fix} f$ und $\lambda \in K$ auch $v_1 + v_2$ und $v_2\lambda$ in $\mathrm{Fix} f$ liegen.
Seien also v_1 und v_2 aus V mit $f(v_1) = v_1$ und $f(v_2) = v_2$ und $\lambda \in K$. Dann folgt mit der Linearität von f und wegen $f(0) = 0$

$$f(v_1 + v_2\lambda) = f(v_1) + f(v_2)\lambda = v_1 + v_2\lambda.$$

(Man setze $\lambda = 1$ oder $v_1 = 0$, um zu den Einzelaussagen zu kommen.)

Alternative Lösung: Fixvektoren ungleich 0 sind genau die Eigenvektoren zum Eigenwert 1. Daher ist $\mathrm{Fix} f$ der Eigenraum zum Eigenwert 1 und damit (nach einem Satz der Vorlesung) Unterraum von V.

(ii) Sei $v = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathrm{Fix} f_1$. Dann gilt

$$f_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = M_B^B(f_1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

und $v \in \text{Fix} f_1$ genau dann, wenn v Lösung des folgenden Linearen Gleichungssystems ist:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= x_1 \\ 2x_2 + x_3 &= x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= x_3. \end{aligned}$$

Nach der Umformung, die die rechten Seiten zu 0 bringen, hat dieses LGS die Koeffizienten-Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

bei der die erste und letzte Zeile übereinstimmen. Es folgt (mit $x_1 = -x_2 = x_3$ und x_2 beliebig):

$$\text{Fix} f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot K.$$