Übungen zum Lehrkräfteweiterbildungskurs "Lineare Algebra/Analytische Geometrie II"

Aufgabe W0 (Summe von Unterräumen, Basis, Dimension, Faktorraum) [1]
Sei V ein endlich-dimensionaler $K-$Vektorraum, und seien U_1, U_2 Untervektorräume von V! Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen gleichwertig sind:

(i) $V = U_1 \oplus U_2$.

(ii) Ist $B_1 := (u_1 \ldots, u_k)$ eine Basis von U_1 und $B_2 := (w_1, \ldots w_l)$ eine Basis von U_2, so ist $B := (u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_l)$ eine Basis von V.

(iii) $V = U_1 + U_2$ und $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$.

(iv) $V = U_1 + U_2$ und $\dim V/U_1 = \dim U_2$.

Lösungsskizze:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Aus $V = U_1 \oplus U_2$ folgt definitionsgemäß $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Daher sind die Elemente von B_1 unabhängig von denen von B_2 und umgekehrt. Folglich ist B eine linear unabhängige (geordnete) Menge von V. Aus der Dimensionsformel $\dim V = \dim(U_1 \oplus U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$ folgt, dass B Basis von V ist. (ii).

(ii)$\Rightarrow$ (iii) Da B Basis von V ist, folgt $V = U_1 + U_2$ und

$$\dim V = k + l = \dim U_1 + \dim U_2.$$

(iii)$\Rightarrow$ (iv) Aus (iii) folgt

$$\dim V/U_1 = \dim V - \dim U_1 = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim U_1 = \dim U_2.$$

(iv)$\Rightarrow$ (i) Laut Voraussetzung ist $V = U_1 + U_2$. Die Direktheit der Summe ergibt sich aus (iv) und den Dimensionsformeln für Faktorraum und Summe von Unterräumen, hier nämlich

$$\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$$

einerseits und

$$\dim V = \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

andererseits; es folgt $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

[1] Vgl. Lemma 1 in 2.2.5 von G.Fischer: Lehrbuch Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Springer Spektrum 2017[3]