1.Teilklausur zum Modul
'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II' am 11.3.2019

Name, Vorname	Matrikel-Nr. bzw. Kennzeichen	Punkte für Aufg.1

Bearbeiten Sie bitte folgende Aufgabe! Zur vollständigen Lösung gehört auch die (stilistisch einwandfreie zielführende) **Darstellung des Gedankenganges**. Für die vollständig gelöste Aufgabe erhalten Sie 10 Punkte; die erzielte Punktezahl wird auf den zweiten Teil dieser Modulprüfung angerechnet, kann aber nicht in eine evtl. Nachklausur übernommen werden. **Wenn nicht anders vermerkt, dürfen Sie hier Sätze und Formeln aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden.**

Aufgabe 1

(Determinante, Komplement eines Unterraums, Dimensions-Formeln, Faktorraum)

Seien $v_1 := (0,1,1,0)$, $v_2 := (1,1,0,0)$, $v_3 := (1,1,1,0)$ und $v_4 := (0,0,0,1)$ Vektoren des $\mathbb{R}$-Vektorraums $V = \mathbb{R}^4$.

(i) (2 Punkte) Berechnen Sie folgende Determinante über $\mathbb{R}$ (mit den Zeilen v_i):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(ii) (1 Punkt) Ist $B := \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$? (Mit Begründung!)

(iii) (1 Punkt) Geben Sie ein Komplement W des Unterraums $U :=< v_1, v_2 >$ in V an (hier ohne Beweis)!

(iv) (2 Punkte) Geben Sie eine Abbildung $\hat{f}$ von B in $\mathbb{R}^4$ an und eine lineare Fortsetzung f von $\hat{f}$ auf V mit $\mathrm{Kern} f = U$ und $\mathrm{Bild} f = W$!

Hinweis zu (v) und (vi): Dimensionsformeln dürfen Sie hier unbewiesen verwenden.

(v) (2 Punkte) Sei $X :=< v_1, v_3 >$. Beweisen Sie, dass es keine surjektive lineare Abbildung g von $\mathbb{R}^4$ auf $\mathbb{R}^3$ gibt mit $\mathrm{Kern}\ g = X$.

(vi) (2 Punkte) Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(U \oplus W)/U$ und $\dim_{\mathbb{R}}(U + X)/U$ (für die obigen Unteräume U, W und X).

Lösungsskizzen:

(i) (2 Punkte) Es gilt z.B. (durch Entwicklung nach Laplace):

$$|M| := \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \underline{1} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \underline{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

(ii) Eine quadratische Matrix hat genau dann vollen Rang, wenn ihre Determinante ungleich 0 ist. Da $|M|$ ungleich 0 ist, sind die Zeilen von M linear unabhängig. B besteht also aus vier linear unabhängigen Vektoren und hat die Mächtigkeit einer Basis von $\mathbb{R}^4$, ist damit selbst Basis.

(iii) Z.B. ist $W =< v_3, v_4 >$ eine Komplement von U in V.

(iv) Setzt man z.B. die Abbildung $\hat{f}$ mit

$$\hat{f}(v_1) = \hat{f}(v_2) = 0 \quad \text{und} \quad \hat{f}(v_3) = v_3 \quad \text{sowie} \quad \hat{f}(v_4) = v_4$$

linear zu einer Abbildung auf $V =< B >$ fort (Existenz laut Fortsetzungssatz), so erhält man eine Abbildung f mit $f(< v_1, v_2 >) = \{0\}$, also Kern$f = U$, und Bild $f = f(< v_3, v_4 >) =< v_3, v_4 >= W$. Die darstellende Matrix von f bzg. Basis $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ ist dann

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(v) Es wäre $\text{Defekt}(g) = \dim_{\mathbb{R}}(\text{Kern } g) = \dim_{\mathbb{R}} X = 2$ und $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Bild}(g)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3$, im Widerspruch zur Formel

$$\dim_{\mathbb{R}} V = \text{ Defekt}(g) + \text{Rang}(g) = 2 + 3 \quad \text{und} \quad \dim_{\mathbb{R}} V = 4.$$

(vi) Nach den Dimensionsformeln erhält man

$$\dim_{\mathbb{R}}(U \oplus W)/U = (\dim_{\mathbb{R}} U + \dim_{\mathbb{R}} W) - \dim_{\mathbb{R}} U = \dim_{\mathbb{R}} W = 2$$

und

$$\dim_{\mathbb{R}}(U+X)/U = \dim_{\mathbb{R}} U + \dim_{\mathbb{R}} X - \dim_{\mathbb{R}}(U \cap X) - \dim_{\mathbb{R}} U = 2-1 = 1$$

wegen der linearen Unabhängigkeit der v_i und

$$U \cap X = < v_1, v_2 > \cap < v_1, v_3 > = < v_1 > .$$

Ein *alternativer Beweis* benutzt den Isomorphiesatz.