

Klausur 2. Teil (60 minütig) zur Lehrkräfte Weiterbildung
'Lineare Algebra / Analytische Geometrie II' am 20.5.2019

Name, Vorname	Aufg.1 aus Teil 1	Aufg.2	Aufg.3	Aufg.4	Σ	%	Note
Punkte →							

Bearbeiten Sie bitte zwei der drei folgenden Aufgaben! Falls Sie alle drei Aufgaben bearbeitet haben sollten, **kennzeichnen Sie bitte, welche zwei Aufgaben gewertet werden sollen!** Zur vollständigen Lösung einer Aufgabe gehört, wenn nicht anders angegeben, auch die (stilistisch einwandfreie zielführende) **Darstellung des Gedankenganges.**

Pro gelöster Aufgabe erhalten Sie 10 Punkte. Das Resultat der 1. Teilklausur (Aufgabe 1) wird übernommen.

Eigener nicht-programmierbarer Taschenrechner ist erlaubt.

Aufgabe 2 (Invariante Unterräume, Eigenwerte)

- (i) (2,5 Punkte) Seien $B = (e_1, e_2, e_3)$ die kanonische Basis des \mathbb{R} -Vektorraums $V := \mathbb{R}^3$ und g ein Endomorphismus von V mit darstellender Matrix

$$M_B^B(g) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Geben Sie (ohne Berechnung der Eigenräume) zwei (verschiedene!) Unterräume U_1 und U_2 ungleich V mit $g(U_1) = U_1$ und $g(U_2) = U_2$ an (mit kurzer Begründung)!

- (ii) (2,5 Punkte) Welche Eigenwerte besitzt g ?
- (iii) (2 Punkte) Geben Sie die Eigenräume von g an!
- (iv) (3 Punkte) Zeigen Sie : Ist V ein K -Vektorraum der Dimension n , ist $f \in \text{End}_K V$, und gibt es einen Unterraum U von V der Dimension s mit $s < n$ und $f(U) \subseteq U$, dann gibt es eine Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ von V derart, dass gilt:

$$M_B^B(f) = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & * \\ \hline \mathbf{O} & * \end{array} \right)$$

mit $A_1 \in K^{(s,s)}$ und mit der $(n-s) \times s$ - Nullmatrix \mathbf{O} .

Aufgabe 3

(Ähnlichkeit von Matrizen, Diagonalähnlichkeit, charakteristisches Polynom)

- (i) (4 Punkte) Sei

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)} !$$

Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_2}(X)$ und die Eigenwerte von A_2 !

- (ii) (3 Punkte) Begründen Sie kurz (!), warum A_2 diagonalähnlich ist, und geben Sie eine zu A_2 ähnliche Diagonalmatrix an! (Ohne Angabe der Transformationsmatrix!)
- (iii) (3 Punkte) Beweisen Sie (ohne Rückgriff auf den durch sie dargestellten Endomorphismus oder auf ihr charakteristisches Polynom), dass ähnliche Matrizen die gleichen Eigenwerte besitzen.

Lösungshinweis:

Seien A und $B = S^{-1}AS$ ähnliche Matrizen aus $K^{(n,n)}$ mit regulärer Matrix S , ferner w ein Eigenvektor von B zum Eigenwert λ sowie $v \in K^{(n,1)}$ mit $w = S^{-1}v$. Formen Sie dann z.B. die Aussage $Bw = \lambda w$ um!

Aufgabe 4 (Skalarprodukt, Orthogonalität, Norm, Längentreue)

- (i) (5 Punkte) Bestimmen Sie eine symmetrische Bilinearform φ auf dem \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{R}^2 derart, dass gilt:

$$(1, 0) \perp_{\varphi} (0, 1) \text{ und } (2, -3) \perp_{\varphi} (-1, 1) .$$

(\perp_{φ} bezeichne dabei die durch φ induzierte Orthogonalitätsrelation auf \mathbb{R}^2 .)

- (ii) (2 Punkte) Prüfen Sie, ob die Form φ aus (i) ein Skalarprodukt ist!
Lösungshinweis: Ohne Beweis dürfen Sie benutzen, dass eine reelle symmetrische Matrix genau dann positiv definit ist, wenn alle ihre Eigenwerte positiv sind.
- (iii) (3 Punkte) Zeigen Sie (ohne Verweis auf den entsprechenden Hilfssatz der Vorlesung oder dessen Beweis):

Ist (V, ψ) ein Prähilbertraum, und ist f ein Endomorphismus von V mit $\|f(v)\|_{\psi} = \|v\|_{\psi}$ für alle $v \in V$ (längenerhaltender Endomorphismus), so ist f injektiv.

Lösungshinweis: Gehen Sie z.B. von $f(x) = f(y)$ aus und verwenden Sie $\|x - y\|_{\psi} = \|f(x - y)\|_{\psi}$! 2

Lösungsskizzen:

Zu Aufgabe 2

- (i) Es gilt $g(e_1) = e_1$ und $g(\{e_2, e_3\}) = \{e_3, e_2\}$; definiert man z.B.

$$U_1 = \langle e_1 \rangle \quad \text{und} \quad U_2 = \langle e_2, e_3 \rangle,$$

so gilt wegen der Linearität von g und aus Dimensionsgründen

$$g(U_1) = U_1 \quad \text{und} \quad g(U_2) = U_2.$$

Anmerkung 1: Da B die disjunkte Vereinigung der beiden (naheliegender gewählten) Basen von U_1 und U_2 ist, folgt auch $V = U_1 \oplus U_2$.

Anmerkung 2: Auch die Eigenräume zu den Eigenwerten von g (siehe (iii)) kämen als invariante Unterräume infrage, aber gemäß Aufgabenstellung nur, wenn man sie erraten hätte.

- (ii) Wegen $\det(M_B^B(g) - xE_3) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = (1-x)(x^2-1)$ sind

1 und -1 die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von $M_B^B(g)$ und damit die Eigenwerte von g .

- (iii) Lösen von zwei linearen Gleichungssystemen zeigt: Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist $e_1\mathbb{R} + (e_2 + e_3)\mathbb{R}$, der zum Eigenwert -1 gleich $(e_2 - e_3)\mathbb{R}$.

- (iv) (Vgl. Skript Satz 24.11 !)

Ist U ein f -invarianter Unterraum von V , so erweitert man eine Basis $B_1 = (b_1, \dots, b_s)$ von U zu einer Basis B von V . Wegen

$$f(B_1) \subseteq U = \langle b_1, \dots, b_s \rangle$$

hat dann $M_B^B(f)$ die geforderte Null-Untermatrix.

Zu Aufgabe 3

- (i) Es gilt:

$$\begin{aligned} \chi_{A_2}(X) &= \det(A_2 - XE_2) = \begin{vmatrix} 1-X & 3 \\ 1 & -1-X \end{vmatrix} \\ &= -(1-X)(1+X) - 3 = X^2 - 4 = (X+2)(X-2). \end{aligned}$$

A_2 hat also die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -2$, jeweils mit algebraischer und damit geometrischer Vielfachheit 1.

Anmerkung: Nach den Eigenräumen

$$\text{Eig}(A_2, 2) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad \text{Eig}(A_2, -2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

war hier nicht gefragt.

- (ii) Seien v und w Eigenvektoren von A_2 zu den Eigenwerten λ_1 bzw. λ_2 . Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, ist (v, w) eine Eigenbasis zu A_2 ; damit ist A_2 diagonalähnlich.

Alternativ kann man zur Begründung heranziehen, dass χ_{A_2} in Linearfaktoren zerfällt und die geometrische Vielfachheit der Eigenwerte jeweils gleich der algebraischen ist.

Eine zweite Alternative benutzt die Tatsache, dass das Minimalpolynom (das hier gleich dem charakteristischen Polynom ist) in verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

In der Diagonalen einer zu A_2 ähnlichen Diagonalmatrix stehen die Eigenwerte. Also gilt z.B.

$$A_2 \approx \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

- (iii) Seien A und B ähnliche Matrizen aus $K^{(n,n)}$. Definitionsgemäß existiert dann eine reguläre Matrix S mit $B = S^{-1}AS$. Ebenfalls gemäß Definition gilt auch: λ ist Eigenwert von B genau dann, wenn ein Vektor $w \in K^n \setminus \{0\}$ existiert mit $Bw = \lambda w$. Laut Lösungshinweis existiert dann ein $v \in K^n$ mit $S^{-1}v = w$. Damit folgt:

$$Bw = \lambda w \Leftrightarrow S^{-1}AS(S^{-1}v) = \lambda S^{-1}v \Leftrightarrow S^{-1}Av = \lambda S^{-1}v \Leftrightarrow Av = \lambda v.$$

Da mit w auch v ungleich 0 ist und umgekehrt, folgt:

λ ist Eigenwert von A genau dann, wenn λ Eigenwert der zu A ähnlichen Matrix B ist.

Vgl. mit Satz 28.7 des Skripts!

Zu Aufgabe 4

- (i) Allgemein gilt für eine symmetrische Bilinearform auf \mathbb{R}^2

$$\varphi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1 \ y_1) \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

für alle x_i, y_j aus \mathbb{R} , wobei $\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ die zugehörige (symmetrische !) Fundamentalmatrix von φ (mit $a, b, c \in \mathbb{R}$) ist.

Es gilt hier:

$$(1, 0) \perp_{\varphi} (0, 1) \Leftrightarrow 0 = \varphi((1, 0), (0, 1)) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow c = 0,$$

ferner mit $c = 0$ dann

$$(2, -3) \perp_{\varphi} (-1, 1) \Leftrightarrow 0 = (2 \ -3) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = -\frac{2}{3}a.$$

Als Fundamentalmatrix von φ kommt damit $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}a \end{pmatrix}$ infrage.

- (ii) Wäre φ Skalarprodukt, dann müsste die zugehörige Fundamentalmatrix $F := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ positiv definit sein. F ist symmetrisch und reell; für die Eigenwerte a, b gilt nach Teil (i) : Entweder ist a nicht positiv oder b ist nicht positiv (oder $a = b = 0$). Also ist F nicht positiv definit und φ daher kein Skalarprodukt.

Alternative Lösung zur positiven Definitheit: Eine symmetrische Matrix

$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = A$ ist genau dann positiv definit, wenn $a > 0$ und $\det A > 0$.

- (iii) (Vgl. mit Satz 34.3a des Skripts): Wegen der Längenerhaltung von f gilt für alle $x, y \in V$ (vgl. den Lösungshinweis):

$$\|x - y\|_{\psi} = \|f(x - y)\|_{\psi}$$

und wegen der Linearität von f damit

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \|x - y\|_{\psi} = \|f(x - y)\|_{\psi} = \|f(x) - f(y)\|_{\psi} = 0,$$

also im vorliegenden Fall (wegen der positiven Definitheit der Norm) $x = y$ und damit die Injektivität von f .