60-minütige Klausur 2.Teil zur Lehrkräfteweiterbildung 'Geometrie' am 22.5.2019

Name, Vorname	Aufg.1 aus Teil 1	Aufg.2	Aufg.3	Aufg.4	Σ	%	Note

Bearbeiten Sie bitte zwei der drei folgenden Aufgaben! Falls Sie alle drei Aufgaben bearbeitet haben sollten, **kennzeichnen Sie bitte, welche zwei Aufgaben gewertet werden sollen!** Zur vollständigen Lösung einer Aufgabe gehört, wenn nicht anders angegeben, auch die (stilistisch einwandfreie zielführende) **Darstellung des Gedankenganges**. Pro gelöster Aufgabe erhalten Sie 10 Punkte. Das Resultat der 1.Teilklausur (Aufgabe 1) wird übernommen. Eigener nicht-programmierbarer Taschenrechner ist erlaubt.

Aufgabe 2 (Kongruenzsätze, Parallelogramm, Rechteck, Stufenwinkel)
Gegeben sei ein Parallelogramm $\Pi := \lozenge ABCD$ (d.h. ein Viereck mit Eckpunkten A, B, C, D mit parallelen gegenüber liegenden Seiten) der Euklidischen Ebene. Beweisen Sie wie unter (i) bis **(iv)** angegeben folgenden Satz:
Sind die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ von Π gleich lang, so ist Π ein Rechteck.
Lösungshinweis : Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass im Parallelogramm gegenüberliegende Seiten kongruent sind.

(i) (2 Punkte) Die Dreiecke ΔABC und ΔABD sind kongruent. Dies folgt aus einem Kongruenzsatz, nämlich welchem? Geben Sie hier (ohne Beweis) nur die Kurzform des Kongruenzsatzes an! (SWS oder WSW oder SSS oder SsW)!

(ii) (1 Punkt) Was folgt aus dieser Kongruenz für die Winkel $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle ABC$?

(iii) (2 Punkte) Nach welchem Satz sind die Winkel $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle(BC^+, BA^-)$ kongruent?

(iv) (3 Punkte) Welche weitere Beziehung besteht zwischen den Winkeln $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle(BC^+, BA^-)$ und was folgt daraus für die Größe von $\sphericalangle ABC$?

(v) (2 Punkte) Vervollständigen Sie den Beweis!

Aufgabe 3 (Winkel, Winkelhalbierende, Abstand, Lot, Kongruenzsätze)
In der reellen Euklidischen Ebene sei ein Winkel $\alpha = \sphericalangle AOB$ (ungleich Nullwinkel und gestrecktem Winkel) gegeben, außerdem die Winkelhalbierende w_α.

(a) Jeder Punkt R der Winkelhalbierenden w_α von α hat von den beiden Schenkeln $p := OA^+$ und $q := OB^+$ den gleichen Abstand (Länge der Strecke von R zum Lotfußpunkt $S \in p$ bzw. $T \in q$ auf den betreffenden Schenkeln). Zeigen Sie dies wie folgt:
(i)(3 Punkte) Betrachten Sie die Innenwinkel der Dreicke ΔOSR und ΔOTR für die Lotfußpunkte S und T. (Dabei dürfen Sie hier ohne Beweis die Existenz der Lotfußpunkte S und T und deren Lage auf den Schenkeln benutzen, ferner die Tatsache, dass die Winkelsumme im Dreieck konstant gleich $2R$ ist und damit bei zwei gegebenen Größen der Innenwinkel die Größe des dritten Innen-Winkels festliegt.)
(ii) (3 Punkte) Vollenden Sie den Beweis!

(b) (4 Punkte) Im Winkel $\alpha = \sphericalangle AOB$ seien nun A und B so gewählt, dass $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$ gilt, und sei M der Mittelpunkt von $\overline{AB}$. Zeigen Sie mittels Kongruenzbetrachtungen, dass für die Winkelhalbierende von Winkel α gilt: $w_\alpha = OM^+$.

Aufgabe 4 (Mittelsenkrechte, Tangente, Kreis, Hypotenuse)

Sei $\mathbf{k}$ ein Kreis in der reellen Euklidischen Ebene E mit Radius r und Mittelpunkt M ! Zu behandeln sind Eigenschaften von $\mathbf{k}$ und seinen Sekanten und Tangenten:

(i) (5 Punkte) Begründen Sie die folgende Konstruktion des Mittelpunkts M von $\mathbf{k}$: Seien A, B, C drei Punkte auf $\mathbf{k}$. Dann ist $M = m_{AB} \cap m_{BC}$.

Lösungshinweis: Ohne Beweis dürfen Sie verwenden, dass jede Gerade der Ebene den Kreis $\mathbf{k}$ in höchstens 2 Punkten schneidet, dass durch 3 Punkte höchstens ein Kreis geht und dass sich die Mittelsenkrechten eines nicht-ausgearteten (!) Dreiecks in einem Punkt schneiden.

(ii) (5 Punkte) Sei P ein Punkt von $\mathbf{k}$. Beweisen Sie: Eine Gerade g der Ebene mit $P \in g \cap \mathbf{k}$ und $g \perp MP$ ist Tangente an $\mathbf{k}$ (also eine Gerade g mit $|g \cap \mathbf{k}| = 1$) mit Berührpunkt $P \in g \cap \mathbf{k}$.

Lösungshinweis: Betrachten Sie ΔPMR für ein geeignet angenommenes R ! Eigenschaften der Längen von Hypotenuse und Katheten eines Dreiecks dürfen Sie unbewiesen verwenden.

Lösungsskizzen:
Zu Aufgabe 2 (Vgl. Aufgabe C4 und Repetitorium Aufgabe E9 - eine Richtung)

(i) SSS
Anmerkung: Es gilt laut Voraussetzung $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$ und nach Lösungshilfe auch im allgemeinen Parallelogramm $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$. Der Kongruenzsatz SSS liefert daher $\triangle ABC \equiv \triangle ABD$.

(ii) Die Winkel $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle ABC$ haben wegen der Kongruenz der Dreiecke die gleiche Größe.

(iii) $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle(BC^+, BA^-)$ folgt aus dem Satz über die Kongruenz von Stufenwinkeln mit parallelen freien Schenkeln.

(iv) Die beiden Winkel $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle(BC^+, BA^-)$ sind (kongruente) Nebenwinkel voneinander ; daraus folgt, dass $\sphericalangle ABC$ rechter Winkel ist.

(v) Aus Symmetriegründen folgt, dass auch die anderen Innenwinkel rechte sind. Daher ist das Parallelogramm ein Rechteck.

Anmerkung: Alternativ zu einigen der obigen Argumente lassen sich auch Betrachtung von geeigneten Winkelsummen anstellen.
zu Aufgabe 3

(a) (i) Seien S und T die Fußpunkte der Lote von R auf OA^+ bzw. OB^+. In den Dreiecken ΔOSR und ΔOTR sind die beiden Winkel bei O kongruent, da w_α die Winkelhalbierende von $\alpha = \sphericalangle AOB$ ist; die beiden Winkel bei S und T sind rechte Winkel (da $\overline{SR}$ und $\overline{RT}$ die Lote auf die Schenkel sind).
Laut Hinweis haben dann auch die dritten Winkel der beiden Dreiecke die gleiche Größe. Damit stimmen die beiden betrachteten Dreiecke in der Größe aller Innenwinkel überein.
(ii) Da die betrachteten Dreiecke auch in der Größe der gemeinsamen Seite $\overline{OR}$ übereinstimmmen, sind sie z.B. nach dem Kongruenzsatz WSW kongruent. Es folgt $\overline{RS} \equiv \overline{RT}$.

(b) Wegen $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$, $\overline{MA} \equiv \overline{MB}$ und der gemeinsamen Seite $\overline{OM}$ sind die Dreiecke ΔOAM und ΔOBM nach dem Kongruenzsatz SSS kongruent. Daraus ergibt sich sofort, dass $\sphericalangle AOM$ und $\sphericalangle BOM$ konguent sind, woraus $w_\alpha = OM^+$ folgt.

Anmerkung: Aus dem eben Bewiesenen folgt auch die Existenz von w_α.

Zu Aufgabe 4

(i) Da A, B, C als verschiedene Punkte von $\mathbf{k}$ nicht kollinear sein können, ist ΔABC nicht ausgeartet. M ist daher der Schnittpunkt von zwei (und damit aller) Mittelsenkrechten des Dreiecks ΔABC und hat von allen drei Ecken A, B, C den gleichen Abstand. M ist somit der Mittelpunkt des Umkreises dieses Dreiecks und wegen dessen Eindeutigkeit der Mittelpunkt von $\mathbf{k}$.
Alternativ: Wegen $A, B, C \in \mathbf{k}$ gilt $r = |\overline{MA}| = |\overline{MB}| = |\overline{MC}|$; aus Eigenschaften der Mittelsenkrechten folgt daraus $M \in m_{AB}$ sowie $M \in m_{BC}$. Die beiden Mittelsenkrechten können nicht parallel sein, da ansonsten A, B, C kollinear wären. Also folgt $M = m_{AB} \cap m_{BC}$.

(ii) Gäbe es einen Punkt $R \in g \cap \mathbf{k}$ mit $R \neq P$, so wäre ΔMPR ein rechtwinkliges Dreieck, in dem die Länge der Hypotenuse gleich der Länge einer Kathete wäre, ein Widerspruch. Also ist $|\mathbf{k} \cap g| = 1$,