1.Teilklausur zum Modul 'Geometrie ' am 20.3.2019

Name, Vorname	Matrikel-Nr. bzw. Kennzeichen	Punkte für Aufg.1

Bearbeiten Sie bitte folgende Aufgabe! Zur vollständigen Lösung gehört auch die (stilistisch einwandfreie zielführende) **Darstellung des Gedankenganges**. Für die vollständig gelöste Aufgabe erhalten Sie 10 Punkte; die erzielte Punktezahl wird auf den zweiten Teil dieser Modulprüfung angerechnet, kann aber nicht in eine evtl. Nachklausur übernommen werden. **Falls nicht anders vermerkt, dürfen Sie in der Vorlesung eingeführte Axiome und hergeleitete Sätze bzw. Formeln hier ohne Beweis verwenden.**

Aufgabe 1 (Parallelprojektion, Schnitte und Parallelität von Geraden und Ebenen, Eigenschaften von Translationen)
Hinweis: Eigenschaften von Parallelprojektionen dürfen **hier nicht unbewiesen** verwendet werden.
Seien E und F zwei Ebenen eines 3-dim affinen Raumes $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{E})$; sei ferner g eine weder zu E noch zu F parallele Gerade von $\mathcal{A}$. Deren Existenz wird hier vorausgesetzt. Zu zeigen ist, dass E und F die gleiche Mächtigkeit haben, und zwar durch Beweise der folgenden Teil-Behauptungen:

(a) (i) (2 Punkte) g und E schneiden sich in genau einem Punkt!

(ii) (1 Punkt) Zu jedem Punkt P von E existiert genau eine Gerade $h_P \in \mathcal{G}$ durch P mit $h_P \parallel g$.

(iii) (2 Punkte) Für alle Punkte P in E gibt es genau einen Punkt $Q_P \in F$, der Schnittpunkt von h_P mit F ist. (Anwendung welchen Satzes aus der Vorlesung?)

(iv) (1 Punkt) $|E| = |F|$.

(b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass es im Falle $E \parallel F$ eine Translation τ von $\mathcal{A}$ mit

$$\tau(E) = F$$

gibt.
Hinweis: Ohne Beweis dürfen Sie hier verwenden, dass Translationen Ebenen auf parallele Ebenen abbilden (also die Umkehrung der zu beweisenden Aussage) und dass die Translationsgruppe transitiv auf $\mathcal{P}$ operiert.

Lösungsskizzen

(a) (i) Aufgrund der Definition der Parallelität von Geraden und Ebenen folgt aus $g \nparallel E$, dass $|g \cap E| \geq 1$. Wäre $|g \cap E| \geq 2$, so müsste laut einem Axiom $g \subseteq E$, also $g \parallel E$ gelten, ein Widerspruch.
Analog folgt $|g \cap F| = 1$.

(ii) Dies gilt infolge des Euklidischen Parallelenaxioms, das in 3-dim Räumen definitionsgemäß gefordert ist.

(iii) Nach einem Satz der Vorlesung schneidet eine Gerade (hier h_P) die Ebene F in genau einem Punkt, wenn sie parallel ist zu einer Geraden, die die Ebene F ebenfalls in genau einem Punkt schneidet, (hier g) .

(iv) Die Zuordnung $P \mapsto F \cap h_P$ ist nach (iii) eine injektive und aus Symmetriegründen bijektive Abbildung von E auf F, woraus die Behauptung folgt.

(b) Seien P und Q Punkte von $\mathcal{A}$ mit $P \in E$ und $Q \in F$. Laut Vorlesung (bzw. Lösungshinweis) exisitiert eine Translation τ_{PQ} von $\mathcal{A}$ mit $\tau_{PQ}(P) = Q$.

Da Ebenen auf parallele Ebenen abgebildet werden, ist $E' := \tau_{PQ}(E)$ eine Ebene mit $F \parallel E \parallel E'$. Wegen der Transivität der Parallelitätsrelation von Ebenen ist damit $E' \parallel F$; da $Q \in E' \cap F$ gilt, folgt aus der Definition der Paralleleität von Ebenen $E' = F$ und damit

$$\tau_{PQ}(E) = E' = F.$$