21.3.18

Wiederholung

$K[X] := (K^{(\mathbb{N}_0)}, +, \cdot_K, \cdot)$ heißt Polynomalgebra,

(27.6) $K[X]$ ist eine K-Algebra mit Basis $\{X^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$
$\operatorname{grad}(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i) := n$, falls $\alpha_n \neq 0$.

Einsetzhomomorphismus

Sei $\mathcal{Q}$ K-Algebra mit 1, (z.B. $\mathcal{Q} = K$, $\mathcal{Q} = K^{(n,n)}$, $\mathcal{Q} = \operatorname{End}_K V$)
$\alpha \in \mathcal{Q}$.

(27.7) Anm.
$$\begin{cases} K[X] \to \mathcal{Q} \\ P = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i \mapsto P(\alpha) := \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \alpha^i \end{cases}$$
α fest

Eigenschaften von Polynomen:

Vor. K Körper, $P \in K[X] \setminus \{0\}$, $\operatorname{grad} P = n$.

27.9 Beh. P hat höchstens n Nullstellen.
(im Fall $K = \mathbb{C}$ genau n Nullstellen mit Mehrfachzählung)
$$P = \beta \cdot \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$$
$\beta \in K$

27.12 **Teilen mit Rest:**

Vor.: $P, Q \in K[X]$, $Q \neq 0$.
Beh. $\exists\, R, S \in K[X]$: $P = Q \cdot S + R$ und $\operatorname{grad} R < \operatorname{grad} Q$

Folgerung:

α Nullstelle von P. $\Rightarrow \exists\, Q \in K[X]: P = (X - \alpha)Q$

Def. $Q \in K[X]$ heißt Teiler von $P \in K[X]$, falls $\exists S \in K[X]: P = Q \cdot S$

" $Q \mid P$ "

Q echter Teiler, falls

$1 \leq \operatorname{grad} Q < \operatorname{grad} P$

$P \in K[X]$ heißt irreduzibel, falls P keine echten Teiler hat

($\triangleq$ Primzahlen in $\mathbb{Z}$)

(27.16) **Zerlegung in irreduzible Faktoren:**

Jedes $P \in K[X] \setminus \{0\}$ lässt sich (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutig darstellen als

$P = \alpha \cdot P_1 \cdots P_k$ mit $\alpha \in K \setminus \{0\}$

und normierten (=höchster Koeffizient 1) irreduziblen Polynomen P_i.

$X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$

Def. Ideal in einem Ring

Vor. $(R, +, \cdot)$ kommutativer Ring mit 1

Def. $J \subseteq R$ heißt Ideal, falls

J UG von $(R, +)$ und

$R \cdot J \subseteq J$.

Def. $J \subseteq R$ heißt Hauptideal, wenn

$\exists a \in R: J = Ra =: (a)$

Beispiele: $R = \mathbb{Z}$

- $(2) = 2\mathbb{Z}$ Ideal der geraden ganzen Zahlen

- $(4,6) = 4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} \subseteq 2\mathbb{Z}$

  $ggT(4,6) = 2 = 1 \cdot 6 + (-1) 4$

  $\Rightarrow 2 \in 4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z}$

  $\Rightarrow 4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$

$R = K[X]$

Für $P \in K[X]$ ist

$(P) = \{ P \cdot Q \mid Q \in K[X] \}$

das Ideal der durch P teilbaren Polynome

z.B.: $((X-1)) = (X-1) \cdot K[X]$

$(2) = (1) = K[X]$

(27.17) Satz

In $\mathbb{Z}$ und in $K[X]$ ist jedes Ideal Hauptideal.

Ringe mit dieser Eigenschaft heißen Hauptidealringe

Genauer: ...