13.3.18

Wiederholung

Ziel u.a., 1-dim invariante Unterräume von f_A bzw. $A \in K^{(n,n)}$ zu bestimmen!

gesucht also $v \in V = K^{(n,1)}$ mit $v \neq 0$ und

$$\underline{Av = \lambda v} \text{ für ein } \lambda \in K.$$

v heißt dann

$\boxed{\text{Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda}$

Umformung

$$Av = \lambda v \iff Av - \lambda v = 0$$
$$\iff Av - \lambda E_n v = 0$$
$$\iff (A - \lambda E_n) v = 0 \quad (*)$$

$(*)$ lösbar mit $v \neq 0$

$$\iff A - \lambda E_n \text{ ist singulär}$$

$$\iff \det(A - \lambda E_n) = 0$$

$$\iff \lambda \text{ Nullstelle von } \det(A - X E_n) = 0$$

$$\det(A - XE_n) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - X & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - X & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} - X \end{vmatrix} = \chi_A(X)$$

Im Fall $n = 2$

$$\chi_A(X) = X^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22}) X + \det A$$

Polynom

Auch allgemein:

$\chi_A(X) = \det(A - X E_n)$ ist ein Polynom,

das sog. $\boxed{\text{charakteristische Polynom}}$

von A

Exkurs: § 27 Polynome

Motivation:

$$\alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \ldots + \alpha_n X^n \qquad \alpha_i \in K$$

$$\longleftrightarrow \quad (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 0, 0, \ldots)$$

aus

$$K^{(\mathbb{N}_0)} = \left\{ (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{nur endlich} \\ \text{viele } \alpha_i \\ \text{ungleich } 0 \end{array} \right\}$$

$$(\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\})$$

(27.1) Def.

Addition auf $K^{(\mathbb{N}_0)}$

$$(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_0} + (\beta_i)_{i \in \mathbb{N}_0} := (\alpha_i + \beta_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$$

S-Multiplikation

$$(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \cdot \lambda := (\alpha_i \lambda)_{i \in \mathbb{N}_0}$$

Multiplikation

$$(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \cdot (\beta_i)_{i \in \mathbb{N}_0} := \left(\sum_{j=0}^{i} \alpha_j \beta_{i-j} \right)_{i \in \mathbb{N}_0}$$

(27.2) Satz $K[X] := (K^{(\mathbb{N}_0)}, +, \cdot_K, \cdot)$ ist eine kommutative K-Algebra

Polynom-Algebra

(insbes. K-Vektorraum, kommutativer Ring und Verträglichkeit von „$\cdot$" und „$\cdot_K$")

(27.3) Def. $X := (0,1,0,\dots)$

und $X^0 := (1,0,0,\dots)$

Dann kann man zeigen:

(27.4) $$X^n = (0,\dots,0,1,0,\dots)$$

$\uparrow$ 0. Stelle $\quad$ $\uparrow$ n. Stelle $\quad$ (Bew. durch vollst. Induktion)

und

$$(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, 0, \dots) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i$$

Diese Darstellung ist eindeutig

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i = \sum_{j=0}^{m} \beta_j X^j \quad \text{mit } \alpha_n \neq 0 \neq \beta_m$$

$$\Rightarrow n = m \wedge \alpha_i = \beta_i \text{ f. alle } i = 0,\dots,n$$

$$\begin{aligned}(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, 0, \dots) &= \alpha_0 \cdot (1,0,\dots,0,\dots) \\ &+ \alpha_1 \cdot (0,1,0,\dots) \\ &\;\vdots \\ &+ \alpha_n (0,\dots,0,1,0,\dots) \\ &= \underline{\underline{\alpha_0 \cdot X^0}} + \alpha_1 \cdot X + \dots + \alpha_n \cdot X^n\end{aligned}$$

$\mathcal{B} = \{X^0, X, X^2, \dots, X^n, X^{n+1}, \dots\}$ linear unabh.

$\Rightarrow \mathcal{B}$ Basis von $K[X]$