Wiederholung vom 11. 4. 2018

(28.1) Def. Eigenwert / Eigenvektor

(1) Vor. $f \in \mathrm{End}_K V$

Def.

$\lambda \in K$ heißt Eigenwert von f

$\iff \exists\, v \in V \setminus \{0\} : \boxed{f(v) = \lambda v}$

Jedes solche v heißt Eigenvektor von f zum EW λ

(2) Vor. $A \in K^{(n,n)}$

Def.

$\lambda \in K$ heißt Eigenwert von A

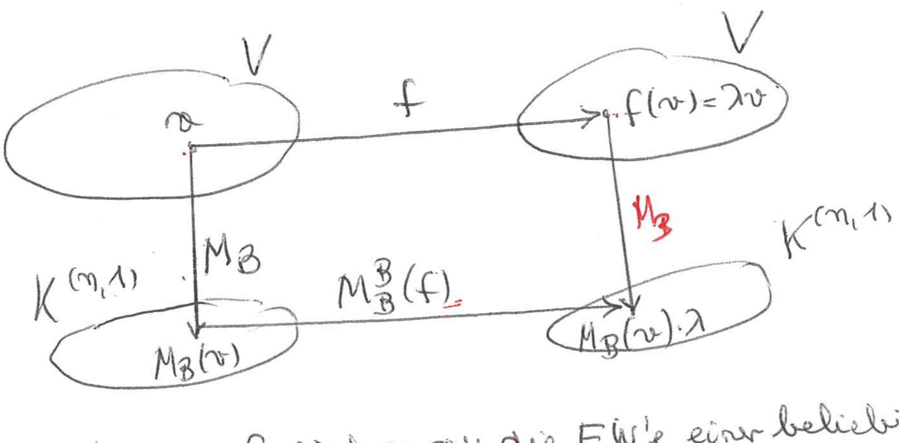
$\iff \exists\, v \in K^{(n,1)} \setminus \{0\} : \boxed{Av = \lambda v}$

Jedes solche v heißt Eigenvektor von A zum EW λ

(28.2) Anm. Sei $\dim_K V = n < \infty$, $f \in \mathrm{End}_K V$ und B Basis von V. Dann gilt

$\lambda \in K$ ist EW von $f \iff \lambda \in K$ ist EW von $M_B^B(f)$

$v \in V \setminus \{0\}$ ist EV von $f \iff M_B(v)$ ist EV von $M_B^B(f)$



- Die EW'e von f sind genau die EW'e einer beliebigen Matrixdarstellung von f

- Ähnliche Matrizen haben die gleichen Eigenwerte.

11.4.18

(28.5) Berechnung der Eigenwerte

Vor. $\dim_K V = n < \infty$

$f \in \mathrm{End}_K V$

$A = M_B^B(f)$ oder $A \in K^{(n,n)}$

Beh. λ EW von f bzw. A

$\Longleftrightarrow \det(A - \lambda E_n) = 0$

Def. $\chi_A(X) := \det(A - X E_n) \in K[X]$

heißt charakteristisches Polynom von A

(bzw. von f mit $A = M_B^B(f)$)

Also: Die EW'e von A (bzw. f mit $A = M_B^B(f)$) sind genau die Nullstellen von χ_A.

Anm.: Ähnliche Matrizen haben dasselbe charakt. Polyn
(28.7)

(28.3) Berechnung der Eigenvektoren

Vor. $A \in K^{(n,n)}$ bzw. $f \in \mathrm{End}_K V$ mit $A = M_B^B(f)$

HS x ist EV von A zum EW λ

$\Longleftrightarrow$ x ist nicht-triviale Lösung des

LGS $(A - \lambda E_n) \cdot x = 0$

(bzw. von $(f - \lambda \mathrm{id}_V)(x) = 0$)

(28.4) Def. Eigenraum zum EW λ:

$\mathrm{Eig}(f,\lambda) = V_{f,\lambda} := \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\}$

$\mathrm{Eig}(A,\lambda) = V_{A,\lambda} := \{x \in K^{(n,1)} \mid Ax = \lambda x\}$

Anm.: $\mathrm{Eig}(f,\lambda)$ ist UR von V
$\mathrm{Eig}(A,\lambda)$ " " " $K^{(n,1)}$