Def. Basis

Sei V K-VR und $B \subseteq V$.
Dann heißt B Basis von V g.d.w.
B linear unabhängiges Erzeugendensystem ist,
also gilt: $\boxed{\begin{array}{l} (1)\ B \text{ ist lin. unabh.} \\ (2)\ V = \langle B \rangle \end{array}}$

Beispiele:

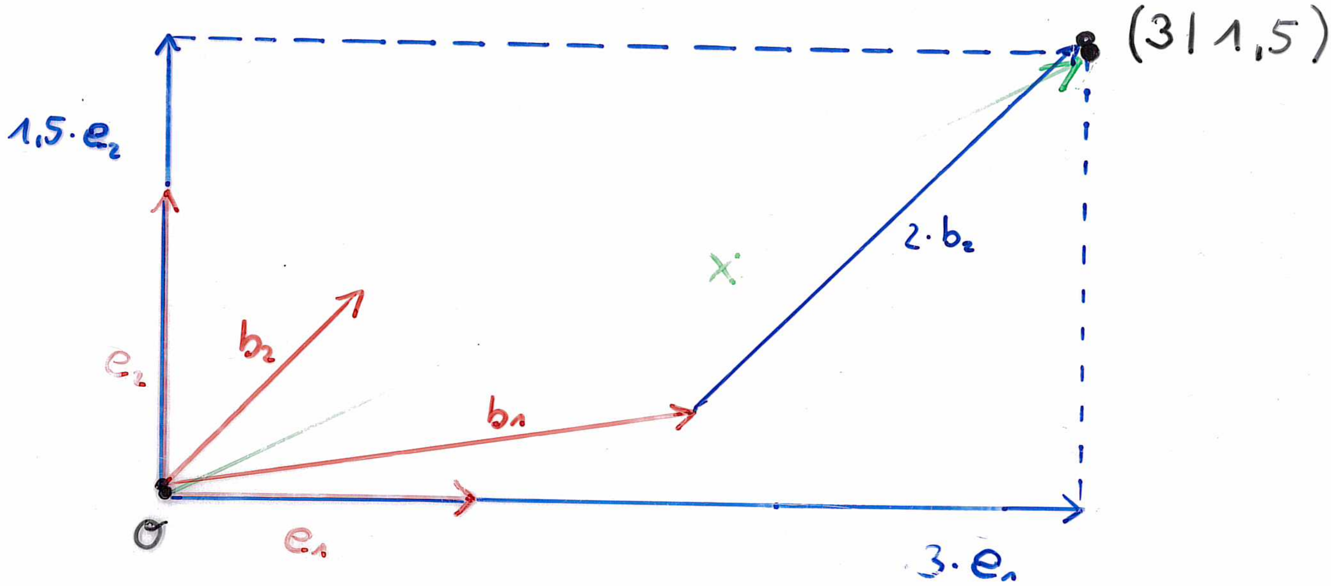
a) $V = K^n$. $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ mit $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$,
$e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$
B ist die kanonische Basis von V.

b) V sei der $\mathbb{R}$-VR der Ebene.
$B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ist eine Basis, ebenso $\{\vec{a}, \vec{b}\}$,
wenn $\vec{a}, \vec{b}$ lin. unabh. sind.

c) $\emptyset$ ist Basis des Nullraumes eines VR's.

1. Beispiel:

Sei $C = (e_1, e_2)$, $B = (b_1, b_2)$ Basis von $V = \mathbb{R}^2$



$$x = 3 \cdot e_1 + 1{,}5 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}_C$$

$$x = 1 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B$$

2. Beispiel:

Sei V $\mathbb{R}$-VR aller (2×2)-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{R}$,

$E = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ sei als Basis gewählt.

Sei $x := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$. Dann gilt wegen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}_E$$

Satz: (Charakterisierung von Basen)

Sei V ein K-VR. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) B ist Basis von V (d.h. lin. unabh. EZS)

(b) B ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V

(d.h. B lin. unabh. und für alle

$x \in V \setminus B$: $B \cup \{x\}$ lin. abh.)

(c) B ist ein minimales Erzeugendensystem von V

(d.h. $V = \langle B \rangle \wedge \forall x \in B : \langle B \setminus \{x\} \rangle \subsetneqq V$)

(d) Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich (abgesehen von Summanden der Form $b_j \cdot 0$, Reihenfolge und Aufspalten von Summanden) auf genau eine Weise als Linearkombination von B darstellen.

Bew.-Skizze: (a) $\Rightarrow$ (d)

Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ Basis von V.

zz. Jedes $v \in V$ lässt sich eindeutig als $LK(B)$ darstellen.

Sei $v \in V$.

Dann gilt $v \in LK(B) = \langle B \rangle$, da B EZS.

Sei $\sum_{i=1}^{m} b_i \lambda_i = v = \sum_{i=1}^{m} b_i \mu_i$ $\quad$ ($b_i \in B$, alle b_i versch.)

[Also: Wir nehmen an, es gäbe zwei Darstellungen von v.]

Dann folgt: $\underbrace{\sum_{i=1}^{m} b_i (\lambda_i - \mu_i)}_{\text{muss triviale LK der } 0 \text{ sein!}} = 0$

$\Rightarrow \lambda_i - \mu_i = 0 \quad$ (f.a. $i = 1, \dots, m$)

$\Rightarrow \lambda_i = \mu_i \quad$ (f.a. $i = 1, \dots, m$)

$\Rightarrow$ Beh.

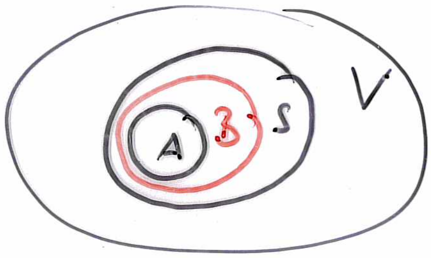
Sätze zu Basen

[Die folgenden Sätze gelten für endliche Basen. Für unendl. Basen gelten sie nur, falls das sog. „Auswahlaxiom" oder das „Zornsche Lemma" herangezogen wird.]

Satz (Basis-Ergänzungs-Satz)

Ist V VR, A lin. unabh. Teilmenge und S ein EZS von V mit $A \subseteq S$, dann ex. eine Basis B von V mit $A \subseteq B \subseteq S$.

Bew. s. Skript Lin. Alg. I, Schulz, S. 113.



Korollar (Basis-Existenz-Satz)

Jeder VR V besitzt eine Basis.

Bew. Man setze $A = \emptyset$, $S = V$ und wende den Basis-Ergänzungs-Satz an.

Satz (Elementanzahl in Basen)

Je zwei Basen eines endl. erzeugbaren K-VR's V enthalten dieselbe (endl.) Anzahl von Elementen.

Mit Heranziehen des „Auswahlaxioms" gilt auch:

Satz von Löwig (Basis-Gleichmächtigkeitssatz)

Je zwei Basen eines K-VR's V sind gleichmächtig.

(Beweise, s. Skript Lin. Alg. I, Schulz; S. 116)

Definition

Sei V ein K-VR.
Die Mächtigkeit m einer (und damit jeder) Basis von V heißt die

Dimension des VR's V über dem Körper K,

oft auch Rang von V über K.

Schreibweise: $\boxed{\dim_K V = m.}$

(V ist ein m-dimensionaler VR.)

Def.

Sei V K-VR, $\overline{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ endl. Basis.

Festlegung der Reihenfolge der Elemente von $\overline{B}$:

$B = (b_1, \dots, b_n)$ geordnete Basis

Jedes $x \in V$ lässt sich nun auf genau eine Weise in der Form

$$\boxed{x = \sum_{i=1}^{n} b_i \lambda_i}$$

darstellen. λ_i heißt dann die i-te Koordinate von x bzgl. $B = (b_1, \dots, b_n)$.

Schreibweise: $$x = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_B$$

$M_B(x) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ heißt Koordinatenvektor von $x = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_B$.

Beispiele:

1) Sei V VR der Vektoren der reellen Ebene

$V = \langle e_1, e_2 \rangle$, also $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$

Dimension von Unterräumen:

$\dim_{\mathbb{R}}(a\mathbb{R}) = 1$, für $a \in V \setminus \{0\}$

$\dim_{\mathbb{R}}(\{0\}) = 0$ (da $\emptyset$ Basis von $\{0\}$ ist)

2) Für $V = K^n$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$\dim_K K^n = n$ (da $\{e_1, \ldots, e_n\}$ Basis ist)

Anm: Besitzt der K-VR V keine endl. Basis, so nennt man ihn auch oft unendlich-dimensional (in Zeichen: $\dim_K V = \infty$)

Beispiel:

$\{ id_{\mathbb{R}}^i \mid i \in \mathbb{N}_0 \}$ ist eine Basis von $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, dem VR der reellen Polynomabbildungen.

Daher gilt: $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{P}(\mathbb{R}) = \infty$.

genauer: $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{P}(\mathbb{R}) = \aleph_0$

Definition: Vektorraum-Isomorphismus

Seien V und V' VR'e über demselben Körper K.

V und V' heißen isomorph (in Zeichen $V \cong V'$), wenn es eine Bijektion $f: V \to V'$ gibt mit:

(1) $\forall v, w \in V: \quad f(v+w) = f(v) + f(w)$;

(2) $\forall v \in V: \forall \lambda \in K: \quad f(v\lambda) = f(v) \cdot \lambda$.

Eine Bijektion dieser Eigenschaft heißt Vektorraum-Isomorphismus.

Bsp. Sei V K-VR, $\dim_K V = n$. Dann ex. Basis B.

Die Abb.

$$i_B : \begin{cases} V \longrightarrow K^n \\ v = \sum_{i=1}^{n} b_i \lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_B \longmapsto (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \end{cases}$$

ist VR-Isomorphismus.

Es gilt:

Satz: Sei V K-VR, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\boxed{\dim_K V = n \iff V \cong K^n}$$

Bis auf Isomorphie gibt es nur einen VR der Dim. n.

Bew.: s. Skript, Lin. Alg. I, Schulz, S. 120/121

Lineare Abbildungen

Def.

Seien V und W K-VR'e.

Eine Abbildung $f: V \to W$ heißt **lineare Abbildung** (lineare Transformation, K-Homomorphismus, Vektorraum-Homomorphismus, linearer Operator), wenn gilt:

(1) $\forall_{x,y \in V}$: $\boxed{f(x+y) = f(x) + f(y)}$ (Additivität)

(2) $\forall_{x \in V} \forall_{\lambda \in K}$: $\boxed{f(\lambda x) = \lambda \cdot f(x)}$ (Homogenität)

Beispiel 1: Seien $V = W = \mathbb{R}$. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = 3x.$$

Beh. f ist lineare Abb.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f(a+b) = 3(a+b) = 3a + 3b = f(a) + f(b)$$

und $$f(\lambda a) = 3(\lambda \cdot a) = \lambda \cdot 3a = \lambda \cdot f(a)$$