21.2.2018

Wiederholung

(13.2) Satz von der linearen Fortsetzung

Vor. V, W Vektorräume über dem Körper K

$(b_i)_{i\in I}$ geordnete Basis von V

$(w_i)_{i\in I}$ Familie von Vektoren von W

Beh. $\exists 1\ f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ mit $f(b_i) = w_i$ für alle $i \in I$

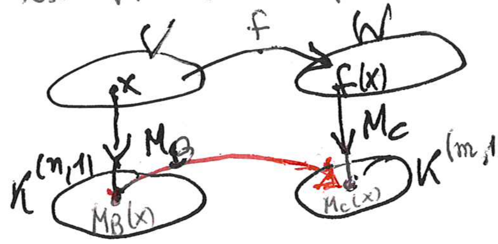
Dabei: $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ K-VR der linearen Abbildungen von V in W (13.1)

(13.3) $M_C^B(f)$ Matrix von f bzgl. festem Basispaar (B, C)

j-te Spalte: Koordinatenvektor von $f(b_j)$ bzgl. Basis C

$$M_C^B : \begin{array}{l} \mathrm{Hom}_K(V,W) \to K^{(m,n)} \\ f \mapsto M_C^B(f) \end{array}$$ ist VR-Isomorphismus

$$M_C(f(x)) = M_C^B(f) \cdot M_B(x)$$

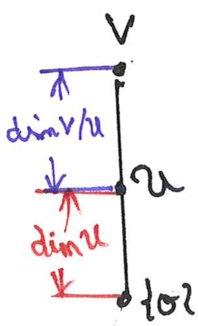


(17.1) Def. Faktorraum

Vor V K-VR
U UR von V

Def. $V/U := \{a + U \mid a \in V\}$

$$(a+U) \boxplus (b+U) := a+b+U$$
$$(a+U) \boxdot \lambda := a\lambda + U$$



Beh. $(V/U, \boxplus, \boxdot_K)$ ist K-VR, der Faktorraum von V nach U

(19.1/2) Def.: $\mathrm{codim}_V U := \dim_K(V/U)$ Kodimension von U in V

Beh.: $\dim_K U + \mathrm{codim}_V U = \dim_K V$

(17.5) Homomorphiesatz für VR'e

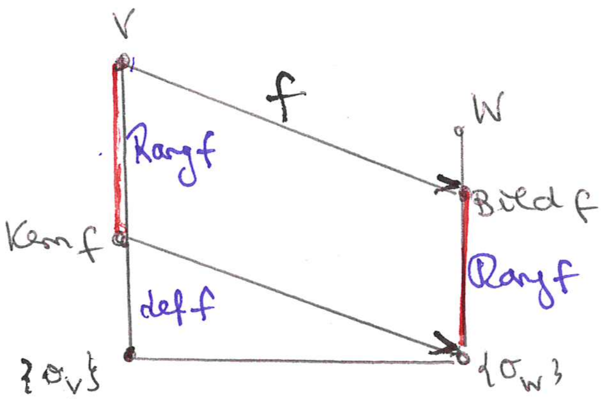
<u>Vor.</u> V, W K-VR'e

$f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$

<u>Beh.</u> $$\boxed{V / \mathrm{Kern}\, f \cong \mathrm{Bild}\, f} \quad (= \mathrm{Im} f)$$

Dabei (vgl. Def.) $\mathrm{Kern}\, f := \{ v \in V \mid f(v) = 0_W \}$ (UR von V)

$\mathrm{Bild}\, f = f(V)$ (UR von W)



Weitere Dimensionssätze

<u>Def.</u> $\mathrm{def}\, f := \dim_K \mathrm{Kern}\, f$

$\mathrm{Rang}\, f := \dim_K (\mathrm{Bild}\, f)$

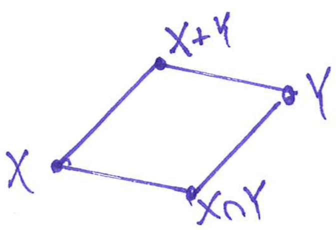
(19.7) Satz $$\boxed{\mathrm{def}\, f + \mathrm{Rang}\, f = \dim_K V}$$

für $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$

<u>Anwendung auf LGS'e:</u> $L = p + L_0$

$\dim_K L = \dim_K L_0 = n - \mathrm{Rang}\, A$

(für lösbares LGS mit n Variablen und Koeffizientenmatrix A)



<u>Vor.</u> X, Y UR'e von V

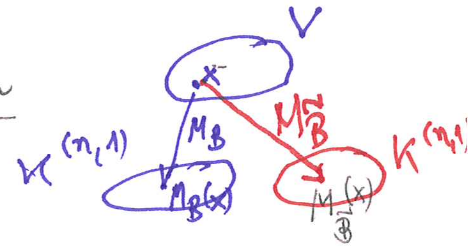
(19.5) <u>Beh.</u>: $\dim_K (X+Y) + \dim_K (X \cap Y) = \dim_K X + \dim_K Y$

für UR'e X, Y eines K-VR's V.

(19.4). speziell, falls $X \cap Y = \{0\}$: (direkte Summe) $\dim_K (X \oplus Y) = \dim_K X + \dim_K Y$

(Y Komplement von X in $X \oplus Y$.)

§ 24 Basiswechsel
äquivalente und ähnliche Matrizen



(24.1) Koordinatentransformation

Vor. $B, \tilde{B}$ geordnete Basen des endl.-dim K-VR's V

$B = (b_1, \ldots, b_n)$, $\tilde{B} = (\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_n)$

$x = id(x)$

(a) Beh.

$$M_{\tilde{B}}(x) = M^{B}_{\tilde{B}}(id_V) \cdot M_B(x)$$

(vgl. 13.3) mit $x = id_V(x)$

(b) Falls $\tilde{b}_j = \sum_{i=1}^{n} b_i \alpha_{ij}$ $(j = 1 .., n)$, so

Koeff. bzgl. B statt bzgl. $\tilde{B}$

$$\boxed{M_{\tilde{B}}(x) = (\alpha_{ij})^{-1} M_B(x) = A^{-1} \cdot M_B(x)}$$

dafür A^{-1} statt A

[formal $(\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_n) = (b_1, \ldots, b_n) \cdot A$]

Beispiel s. Skript