Einige Themen zur Wiederholung beim Lehrkräfteweiterbildungskurs 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II

Sehen Sie sich dabei auch die (zum Teil weggelassenen) Voraussetzungen der Sätze[1] an!

- Ein Element $\lambda \in K$ heißt **Eigenwert** der Abbildung $f \in \operatorname{End} V$ (bzw. der Matrix $M \in K^{(n,n)}$), wenn es ein $x \in V \setminus \{0\}$ (genannt **Eigenvektor**) gibt mit $f(x) = \lambda x$ (bzw. wenn es ein $x \in K^{(n,1)} \setminus \{0\}$ gibt mit $Mx = \lambda x$). (28.1)
  Der **Eigenraum** $\operatorname{Eig}(f, \lambda)$ (bzw. $\operatorname{Eig}(M, \lambda)$) von f (bzw. M) ist definiert als die Menge der Eigenvektoren von f bzw. M zum Eigenwert λ vereinigt mit dem Nullvektor. Der Eigenraum ist ein Unterraum von V. (28.4)

- Das **charakteristische Polynom** χ_M einer Matrix $M \in K^{(n,n)}$ ist wie folgt definiert: $\chi_M(x) = \det(M - xE_n)$. Seine Nullstellen sind genau die Eigenwerte von M. (28.5) Es gilt $\chi_M(M) = 0$ (Satz von Cayley-Hamilton) (28.10)
  Entsprechendes gilt für einen Endomorphismus f mit $\chi_f(x) = \det(f - x \operatorname{id}_V)$.

- Das **Minimalpolynom** H_M von M ist definiert als das vom Nullpolynom verschiedene normierte Polynom minimalen Grades, für das $H_M(M) = 0$ gilt. Es teilt χ_M und hat genau alle Eigenwerte von M als Nullstellen, evtl. in anderer Vielfachheit als χ_M. (28.12/28.14)

- Eine Matrix $M \in K^{(n,n)}$ heißt **diagonalähnlich**, wenn sie zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist. Ist sie Matrix eines Endomorphismus f von V, so gibt es eine Basis von V aus Eigenvektoren von f, eine $f-$Eigenbasis. (29.2)
  Eine Matrix M ist nach (29.2/29.3) genau dann diagonalähnlich, wenn χ_M in Linearfaktoren zerfällt und für jeden Eigenwert λ die algebraische Vielfachheit (Vielfachheit des Faktors $(X - \lambda)$) gleich der geometrischen Vielfachheit (Dimension von $\operatorname{Eig}(M, \lambda)$) ist.
  Eine Matrix M ist nach einem Satz auch genau dann diagonalähnlich, wenn H_M in verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

[1] z.B. K beliebiger Körper oder $K = \mathbb{K}$, V ein K-Vektorraum bzw. $V = K^{(n,1)}$

- Ein **Skalarprodukt** Φ auf einem $\mathbb{K}-$ Vektorraum (mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) ist laut Definition im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eine positiv definite Bilinearform auf V, im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform. (31.1). Insbesondere ist Φ linear in der 1.Komponente, und es gilt: $\Phi(x, y) = \overline{\Phi(y, x)}$ für alle $x, y \in V$. Zudem ist Φ positiv definit, d.h. es gilt $\Phi(x, x) \geq 0$ für alle $x \in V$ und $\Phi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Es heißt (V, Φ) dann **Prähilbertraum**, im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ **euklidischer (Vektor-) Raum**, im Fall $K = \mathbb{C}$ **unitärer Raum**.

- Bzgl. einer Basis $B = (b_1, .., b_n)$ von V lässt sich ein Skalarprodukt Φ wie jede Sesquilinearform mittels einer Matrix (**Fundamentalmatrix**) $M_B(\Phi)$ darstellen: $\Phi(x, y) = M_B(x)^T \cdot M_B(\Phi) \cdot \overline{M_B(y)}$. Hierbei ist $M_B(\Phi) = (\Phi(b_i, b_j))_{i,j=1,\cdot,n}$. (30.4)
  Das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{(n,1)}$ ist definiert als $\Phi(x, y) = x^T y$, und auf $\mathbb{C}^{(n,1)}$ als $\Phi(x, y) = x^T \overline{y}$.

- Ist Φ Skalarprodukt auf V, so ist die $\Phi-$ **Orthogonalität** wie folgt definiert: $x \perp_\Phi y \Leftrightarrow \Phi(x, y) = 0$ (für $x, y \in V$); die Menge aller zu allen Elementen einer Teilmenge U von V orthogonalen Vektoren $V^{\perp_\Phi}$ bildet einen Unterraum, den **Orthogonalraum** zu U. Ist U endlich-dimensionaler Unterraum von V, so ist $U^{\perp_\Phi}$ **orthogonales Komplement** von U in V, also $V = U \oplus U^{\perp_\Phi}$.

- Eine Familie $(e_i)_{i \in I}$ heißt $\Phi-$**Orthonormalsystem**, falls jeder Vektor e_i Norm 1 hat ($||e_i|| = 1$) und je zwei Vekoren orthogonal sind ($\Phi(e_i, e_j) = 0$ für $i \neq j$). Jedes $\Phi-$Orthonormalsystem $(e_i)_{i \in I}$ ist linear unabhängig, und es gilt $x = \sum_{i \in I} e_i \Phi(x, e_i)$. Die Fundamentalmatrix eines Skalarprodukts bezüglich einer Orthonormalbasis in einem endlich-dimensionalen Prähilbertraum ist die Einheitsmatrix.

- Eine **lineare Isometrie** zwischen zwei Prähilberträumen über $\mathbb{K}$ ist definiert als längentreuer Homomorphismus (bzw. äquivalent dazu: abstandstreuer oder mit den Skalarprodukten verträglicher Homomorphismus). Eine lineare Isometrie ist injektiv (und zwischen Vektorräumen gleicher endlicher Dimension damit bijektiv). Ist A die darstellende Matrix eines Endomorphismus f bezüglich Orthonormalbasen in einem endlich-dimensionalen Prähilbertraum, so ist f genau dann Isometrie, wenn A unitär bzw. orthogonal ist, also $\overline{A}^T A = E$ gilt.

Weitere Themen:

- Orthonormierungsverfahren von Gram-Schmidt
- Parallelprojektion, Orthogonalprojektion
- Winkelmaß, Kosinussatz, Satz des Pythagoras