

2. Teil der Modulprüfung zum Lehrkräfteweiterbildungskurs
'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II' am 13.6.2018

Name, Vorname	Artikel-Nr. oder Kennzeichen	Punkte			
		Aufg.1	Aufg.2	Aufg.3	Aufg.4

Bearbeiten Sie bitte zwei der folgenden drei Aufgaben!

Falls Sie drei Aufgaben bearbeitet haben, kennzeichnen Sie bitte, welche der Aufgaben gewertet werden sollen!

Zur vollständigen Lösung gehört auch die (stilistisch einwandfreie zielführende) **Darstellung des Gedankenganges**. (Auch Fehler in der Darstellung können sich negativ auswirken!)

Für jede vollständig gelöste Aufgabe erhalten Sie 10 Punkte. Die erzielte Punktezahl des 1.Klausurteils wird auf den zweiten Teil der Modulprüfung angerechnet. Insgesamt sind damit 30 Punkte möglich.

Aufgabe 2 (Diagonalähnlichkeit)

Sei K ein Körper und M Matrix mit

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in K^{(2,2)} \quad \text{für } a \in K.$$

Für welche $a \in K$ ist M diagonalähnlich? Beweisen Sie Ihre Antwort
1.) mithilfe von charakteristischem Polynom, Eigenwerten und Eigenräumen und

2.) mithilfe des Minimalpolynoms.

Lösungshinweis: Die relevanten allgemeinen Sätze dürfen Sie hier unbewiesen benutzen.

Aufgabe 3 (Skalarprodukt, positiv definit)

Für welche $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein Skalarprodukt g auf dem \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{R}^2 mit

$$(1, 0) \perp_g (0, 1), \quad \|(1, 0)\|_g = 1 \quad \text{und} \quad g((1, 1), (1, 1)) = a^2 + 1$$

und für welche a nicht?

Hinweis: Die Anwendung von Sätzen über positive Definitheit, die in der Vorlesung nicht behandelt wurden, ist hier nicht ohne Beweis erlaubt.

Lösungshinweis: Bestimmen Sie zunächst eine Bilinearform g der geforderten Eigenschaften. Ist dann g positiv definit? Fallunterscheidung!

Aufgabe 4 (Skalarprodukt, Eigenvektoren)

Sei M eine reelle symmetrische Matrix, also $M = M^T \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, und f die lineare Abbildung des \mathbb{R} -Vektorraums $V := \mathbb{R}^{(n,1)}$ in sich mit $x \mapsto Mx$. Das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{(n,1)}$ werde mit Φ bezeichnet.

- (i) Zeigen Sie, dass gilt: (*) $\Phi(f(x), y) = \Phi(x, f(y))$ für alle $x, y \in V$.
- (ii) Beweisen Sie mittels (i), also ohne Verwendung des entsprechenden Satzes über reelle symmetrische Matrizen, dass Eigenvektoren x und y von f zu verschiedenen Eigenwerten λ_1 bzw. λ_2 orthogonal sind.
Lösungshinweis: Betrachten Sie z.B. $\Phi(\lambda_1 x, y)$ und $\Phi(x, \lambda_2 y)$. Wieso sind diese Werte gleich?

Lösungsskizzen:
ad Aufgabe 2

1. Das charakteristische Polynom von M ist definitionsgemäß

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} 1 - X & 1 \\ 0 & a - X \end{vmatrix} = (1 - X)(a - X).$$

Damit zerfällt χ_M in Linearfaktoren.

1.Fall: $a = 1$.

Dann ist die Nullstelle $\lambda = 1$ von χ_M der einzige Eigenwert von M ; er hat die algebraische Vielfachheit 2. Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 1 kann aber nicht zwei sein, da sonst $M = E_2$ wäre.

Alternativ zum letzten Satz:

Der zugehörige Eigenraum ist der Lösungsraum des Linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also mit $y = 0$. Folglich ist $\text{Eig}(M, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} K$. Die geometrische Vielfachheit von λ ist daher 1 und von der algebraischen Vielfachheit verschieden.

Nach einem Satz aus der Vorlesung ist M nicht diagonalähnlich.

2.Fall: $a \neq 1$.

Dann hat M zwei verschiedene Eigenwerte und damit zwei verschiedene Eigenräume, die hier (bei $\dim 2$ des gesamten Raums) notwendigerweise Dimension 1 haben. Daher ist M diagonalähnlich: die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten stimmen überein.

Alternativ: Die Eigenwerte von M sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = a$. Sie haben jeweils die algebraische Vielfachheit 1. Dies ist aber auch die Dimension der Eigenräume:

$$\begin{pmatrix} 1 - a & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ führt zu } \text{Eig}(M, a) = \begin{pmatrix} 1 \\ a - 1 \end{pmatrix} K \text{ und} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ führt zu } \text{Eig}(M, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} K. \text{ Daher ist } M$$

diagonalähnlich: Das charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren und die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten stimmen überein, woraus nach einem Satz aus der Vorlesung die Behauptung folgt.

2. Nach einem Satz aus der Vorlesung ist M diagonalähnlich genau dann, wenn das Minimalpolynom H_M von M in verschiedene Linearfaktoren zerfällt. Ferner besitzt das Minimalpolynom die gleichen Nullstellen wie das charakteristische Polynom.

Ist $a \neq 1$, so sind die Nullstellen von χ_M verschieden; daher ist χ_M gleich dem Minimalpolynom H_M , das damit in verschiedene Linearfaktoren zerfällt. M ist also im Fall $a \neq 1$ diagonalähnlich.

Sei $a = 1$. Dann folgt ebenfalls $\chi_M = H_M$, da das Polynom $(1 - X)$ die Matrix $M (\neq E)$ nicht annulliert. Nun zerfällt H_M nicht in verschiedene Linearfaktoren, und M ist in diesem Fall nicht diagonalähnlich.

ad Aufgabe 3

Zu einer symmetrischen Bilinearform g gehört eine symmetrische Fundamentalmatrix M . Mit den laut Forderung orthogonalen Basisvektoren $b_1 = (1, 0)$ und $b_2 = (0, 1)$ muss M wegen $g(b_1, b_2) = 0$ und $g(b_1, b_1) = \|b_1\|^2 = 1$ die Form

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

haben. Einsetzen von $(1, 1)$ führt wegen $g((1, 1), (1, 1)) = a^2 + 1$ zu

$$a^2 + 1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c + 1, \quad \text{also} \quad c = a^2.$$

Umgekehrt erfüllt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

die gegebenen Forderungen an eine Bilinearform.

Ist M und damit g positiv definit? Dazu berechnet man

$$d := \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \xi^2 + a^2\eta^2.$$

Ist $a \neq 0$, so $d \geq 0$ für alle $(\xi, \eta) \in V$ und $d = 0$ nur für $(\xi, \eta) = (0, 0)$. Ist $a = 0$, so $d = 0$ für alle $(0, \eta)$ und g nicht positiv definit.

Ergebnis: Es existiert genau dann ein Skalarprodukt der gegebenen Eigenschaften, wenn $a \neq 0$ ist.

Alternativ anwendbar ist einer der in der Vorlesung nicht behandelten Sätze: Eine quadratische symmetrische reelle Matrix M ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von M (hier 1 und a^2) größer 0 sind.

Oder:

Eine quadratische symmetrische reelle Matrix M ist genau dann positiv definit, wenn alle führenden Hauptminoren (s.Literatur) von M (hier 1 und $1 \cdot a^2 - 0 \cdot 0$) positiv sind.

ad Aufgabe 4:

- (i) Es gilt $\Phi(f(x), y) = f(x)^T \cdot y = (Mx)^T \cdot y = x^T M^T y = x^T M y = x^T f(y) = \Phi(x, f(y))$. für alle $x, y \in V$, also (*).
- (ii) Seien $x \in \text{Eig}(f, \lambda_1)$ und $y \in \text{Eig}(f, \lambda_2)$. Dann gilt $\lambda_1 \Phi(x, y) = \Phi(\lambda_1 x, y) = \Phi(f(x), y) \stackrel{(*)}{=} \Phi(x, f(y)) = \Phi(x, \lambda_2 y) = \lambda_2 \Phi(x, y)$.

Ist nun $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so folgt $\Phi(x, y) = 0$, also die Orthogonalität der beiden Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten.

Anmerkung: Die entsprechende Eigenschaft von reellen symmetrischen Matrizen (z.B. nach Satz 36.5) ist im Skript nicht bewiesen und sollte laut Aufgabenstellung hier auch nicht ohne Beweis verwandt werden.