

## Übung zum Lehrerweiterbildungskurs 'Geometrie'

### Aufgabe A2 (Affine Ebene, Geradenschnitte, Zentralprojektion)

Seien  $\mathcal{A}$  eine affine Ebene und  $g$  und  $h$  zwei verschiedene Geraden von  $\mathcal{A}$ , ferner  $Z$  ein Punkt von  $\mathcal{A}$  mit  $Z \notin g \cup h$ .

Betrachten Sie die Zuordnung  $\varphi : Q \mapsto QZ \cap h$  für  $Q \in g$ . Definiert  $\varphi$  eine Bijektion von  $g$  auf  $h$ ? Begründen Sie Ihre Antwort! (Fallunterscheidung:  $g \parallel h$  und  $g \not\parallel h$ !)

*Lösungshinweis:* Eine entscheidende Frage ist, ob sich die betrachteten Geraden jeweils schneiden.

#### Lösungsskizze:

Ist  $Q$  Punkt von  $g$ , dann schneidet die (eindeutig bestimmte) Gerade  $ZQ$  die Gerade  $h$  (nach der Definition der Parallelität von Geraden einer Ebene) genau dann in einem Punkt, dem Bildpunkt von  $Q$ , wenn  $ZQ \not\parallel h$  gilt. Analog besitzt ein Punkt  $R$  von  $h$  ein Urbild genau dann, wenn  $ZR \not\parallel g$  ist.

1.Fall: Ist  $g \parallel h$ , so schneidet wegen ( $Z \notin g \cup h$ ) die nach dem Euklidischen Parallelenaxiom eindeutig bestimmte Parallele zu  $g$  und  $h$  durch  $Z$  weder  $g$  noch  $h$ . Daher besitzt jeder Punkt von  $g$  einen eindeutigen Bildpunkt und jeder Punkt von  $h$  einen eindeutigen Urbildpunkt, und  $\varphi$  ist bijektiv.

2.Fall: Ist  $g \not\parallel h$ , so schneidet die nach dem Euklidischen Parallelenaxiom eindeutig bestimmte Parallele zu  $h$  durch  $Z$  zwar die Gerade  $g$  in einem Punkt  $Q$ , aber nicht  $h$ . Daher hat  $Q$  keinen Bildpunkt unter  $\varphi$ , und  $\varphi$  ist keine Bijektion von  $g$  auf  $h$ .  $\square$